Probevorlesung

Der T-Test

Universität Mainz

Oktober 2008

Dr. Jörg Neunhäuserer
e-mail: neunchen@aol.com
http://www.neunhaeuserer.de

1) Stochastische Grundlagen
2) Statistische Anwendung
3) Beispiele
4) Erweiterungen und Grenzen

1) Die T-Verteilung

$X_1, .., X_n$ seien unabhängige, normalverteilte Z-Variabeln mit Standardabweichung σ und Erwartungswert μ

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Standardisierter Mittelwert

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1)$$

Schätze σ durch

$$S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$$T = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu) \sim T_{n-1}$$

T hat eine T-Verteilung mit $n - 1$ Freiheiten

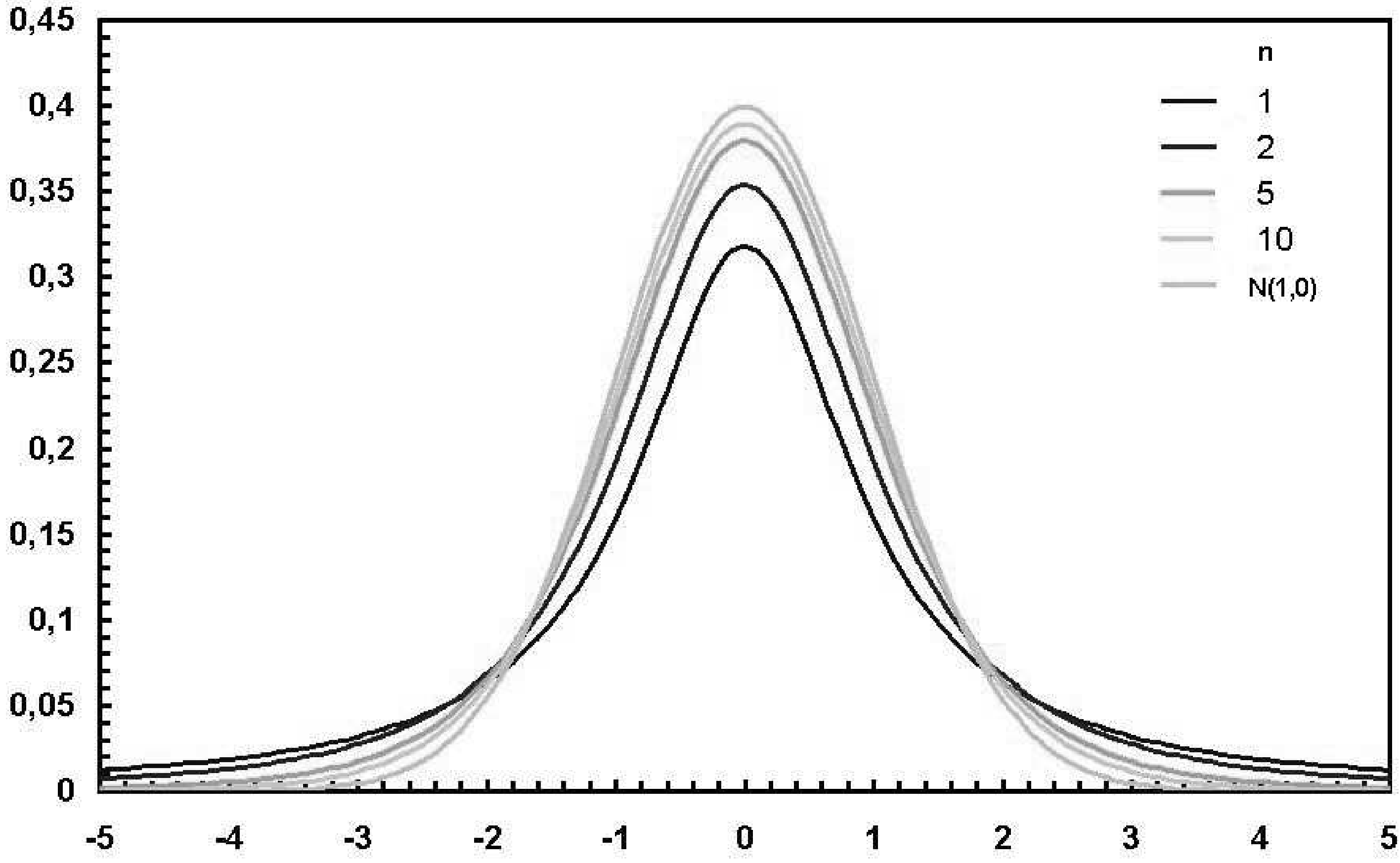
Die Dichte f_n von T_n ist explizit bekannt:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}$$

Γ ist die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Gosset (unter Pseudonym Student) 1908



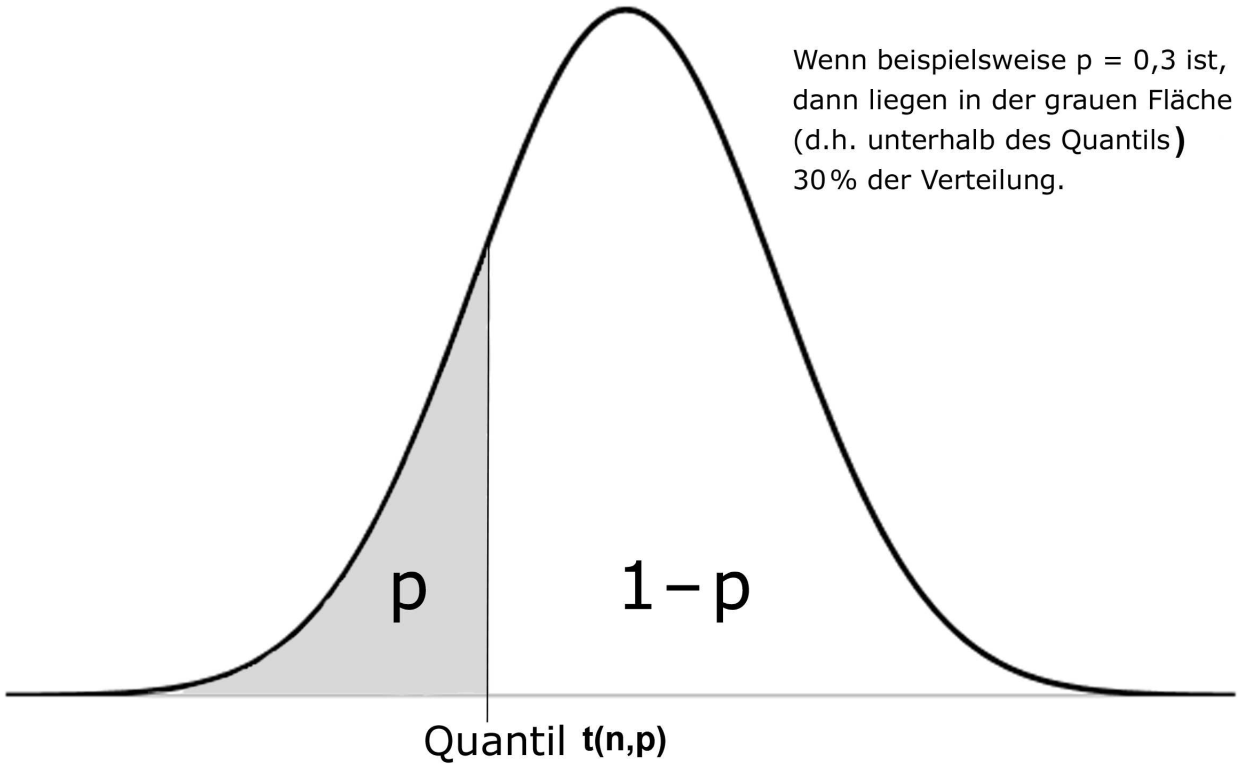
Das p-**Quantil** der T-Verteilung sei $t_{n,p}$

Für $p \in (0,1)$ wähle $t_{n,p} \in \mathbb{R}$, so dass

$$P(T_n \leq t_{n,p}) = \int_{-\infty}^{t_{n,p}} f_n(x)dx = p$$

Die p-Quantile lassen sich numerisch berechnen: Software und Tabellen, z.B.:

$n = 9$ und $p = 0.99$ gibt $t_{n,p} = 2,262$ und
$n = 19$ und $p = 0.95$ gibt $t_{n,p} = 1,729$.



2) Der T-Test

$x_1, \ldots, x_n$ sei eine Stichprobe einer $N(\mu, \sigma^2)$ verteilten Gesamtheit.

Rechtsseitiger Test zu μ:
Nullhypothese $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen
die Hypothese $H_1 : \mu > \mu_0$.

Lege das **Signifikanzniveau** α fest.
($0,05$ $\cong$signifikant, $0,01$ $\cong$sehr signifikant)

Berechne die **Testgrösse:**

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$

$$\bar{x} = \sum \frac{x_i}{n} \quad s = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n}}$$

Entscheidungsregel: Wenn

$$t > t_{n-1,1-\alpha}$$

akzeptiere H_1, sonst keine Aussage.

Fehler 1. Art ist kontrolliert

$$P(H_1 \text{ akzeptiert}|H_0) \leq \alpha$$

Fehler 2. Art, H_0 nicht abgelehnt obwohl H_1 gilt, ist nicht kontrolliert.

Linksseitiger Test zu μ:
Nullhypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen
die Hypothese $H_1 : \mu < \mu_0$.

Entscheidungsregel: Wenn

$$t < -t_{n-1,1-\alpha}$$

akzeptiere H_1, sonst keine Aussage.

Zweiseitiger Test zu μ:
Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen
die Hypothese $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Entscheidungsregel: Wenn

$$|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}$$

akzeptiere H_1, sonst keine Aussage.

3) Beispiele

Kühlschränke. Lebensdauer μ von mehr als 15 Jahren. Wir haben eine Stichprobe mit $n = 10$ und $\bar{x} = 14,1$ J. und $s = 1,1$ J. Wir testen $H_0 : \mu \geq 15$ Jahre gegen $H_1 : \mu < 15$ mit $\alpha = 0,01$. Man erhält

$$t = \sqrt{10}\frac{14,1 - 15}{1,1} = -2,5873$$

$-2,5873 < -t_{9,0.99} = -2,262$ also kann H_0 abgelehnt und H_1 akzeptiert werden.

Dosenproduktion mit $\mu = 500ml$ Inhalt. Wir haben eine Stichprobe mit $n = 20$, $\bar{x} = 499ml$ und $s = 10ml$. Wir testen $H_0 : \mu = 500ml$ gegen $H_1 : \mu \neq 500ml$ mit $\alpha = 0.95$. Man erhält

$$t = \sqrt{20}\frac{499 - 500}{10} = -0,44$$

$|t| < t_{19,0.95} = 1,729$ also kann H_0 nicht abgelehnt werden.

4) Erweiterungen und Grenzen

Zwei unabhängige Stichproben $x_1, \ldots x_n$ und $y_1, \ldots y_n$ aus $N(\mu_1, \sigma^2)$ resp. $N(\mu_2, \sigma^2)$ verteilten Grundgesamtheiten.

Test $H_0 : \mu_0 = \mu_1$ gegen $H_1 : \mu_0 \neq \mu_1$ zum Niveau α. Testgrösse

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n(s_x^2 + s_y^2)}}$$

Falls

$$|t| \geq t_{n-2,1-\alpha/2}$$

wird H_1 akteptiert, sonst keine Aussage.

Der T- Test geht von Normalverteilungen mit gleichen Varianzen aus.

Normalverteilung?$\hookrightarrow$ **Shapiro-Wilk-Test**
Verschiedene Varianzen $\hookrightarrow$**Welsch Test**.

Keine Normalverteilung $\hookrightarrow$
Verteilungsfreie Statistik.