Einführung in die Dimensionstheorie Dynamischer Systeme

Jörg Neunhäuserer

Universität Konstanz

November 2003

neunchen@aol.com

Diskrete Dynamische Systeme

$f : X \longmapsto X \quad X$ Mannig. , f diffbar.

$\Lambda \subseteq X$ invariant d.h. $f(\Lambda) = \Lambda$

μ ergodiches W-Mass auf Λ d.h.

$f(\mu) = \mu \quad f(A) = A \Rightarrow A \in \{0, 1\}$

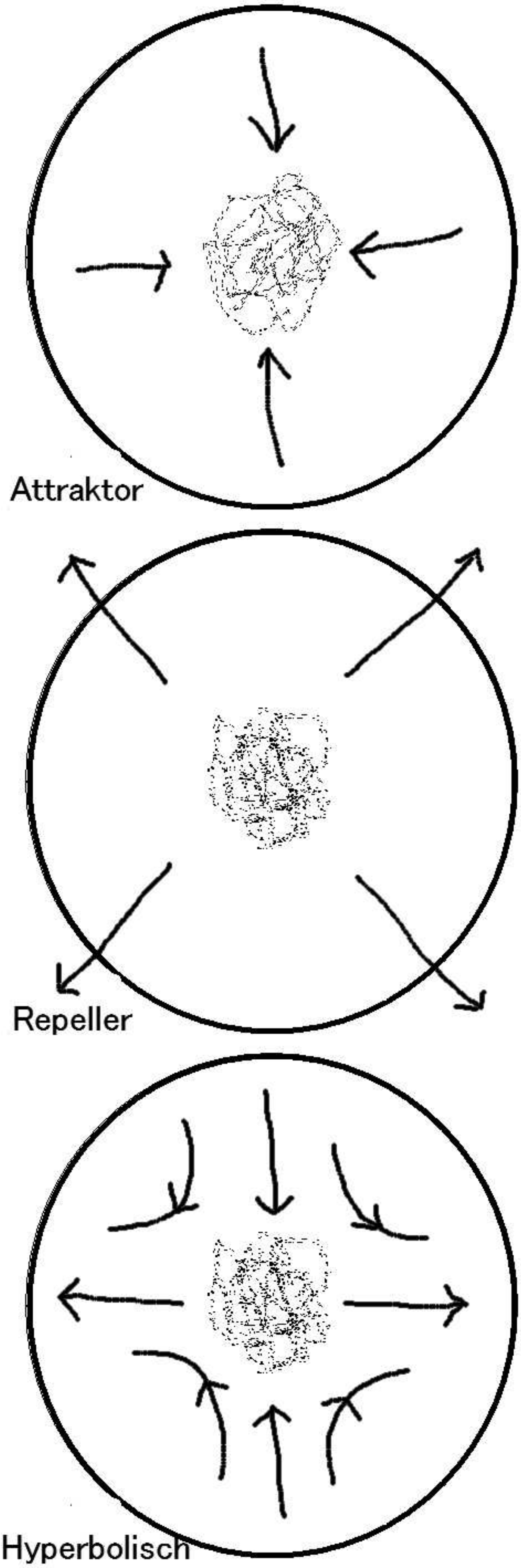
Man intressiert sich insbesondere für die Fälle

Λ Attraktor: $d(f^n x, \Lambda) \to 0 \; \forall x \in U$
Λ Repeller: $d(f^n x, \Lambda) > C \; n > n_0 \; \forall x \in U$
Λ Hyperbolische Menge

Λ hat im Allgemeinen keine glatte Geometrie sondern eine 'fraktale Geometrie' $\hookrightarrow$

Minkoski Dimension $\dim_M \Lambda$
Hausdorff Dimension $\dim_H \Lambda$
Lokale Dimension $\dim_x \mu$

Dies sind Lipschitz Invarianten der Dynamik (Geometrische Invarianten).


Attraktor
Repeller
Hyperbolisch

Dimensionsbegriffe

Minkowsk Dimension

$$\dim_M \Lambda = \lim_{\epsilon \longmapsto 0} \frac{\log N_\epsilon(\Lambda)}{-\log \epsilon}$$

$N_\epsilon(\Lambda)$ ist die kleinste Anzahl von Kugeln mit Radius ϵ die gebraucht werden um Λ zu überdecken.

d-dimensionales Hausdorff Maß

$$H^d(\Lambda) =:= \lim_{\epsilon \longmapsto 0} \inf\{\sum_{i \in I} (\mathrm{diam} P_i)^d |$$

$$Z \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i \text{ und } \mathrm{diam}(P_i) \leq \epsilon\}$$

Hausdorff Dimension

$$\dim_H K = \sup\{d | H^d(K) = \infty\}$$

$$= \inf\{d | H^d(K) = 0\}$$

Lokale Dimension

$$\dim_x \mu = \lim_{\epsilon \longmapsto 0} \frac{\log \mu(B_\epsilon(x))}{\log \epsilon}$$

Zentrale Fragen

- Λ invariant unter f

$$\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda = ?$$

- μ ergodisches W-Maß auf Λ

$$\dim_H \mu = \dim_M \mu = \dim_x \mu = ?$$

- Existiert μ ergodisch mit $\dim_H \mu = \dim_H \Lambda$? ($\mu$ heißt Maß voller Dimension)

Konforme Abbildungen

Theorem [Bowen, Ruelle, Falconer]

Ist f konform und Λ ein Repeller so gilt

$$\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda = s$$

wobei s die Bowen-Gleichung erfüllt

$$P(-s \log |D_x f|) = 0$$

Es existiert ein ergodisches Maß voller Dimension.

Beispiele sind Differenzierbare Abbildungen f auf $\mathbb{R}$ und holomorphe Abbildungen f auf $\mathbb{C}$.

Hyperbolische Maße

Theorem [Barreira, Ledrappier, Pesin, Schmeling, Young]

Ist μ ein ergodisches und hyperbolisches Maß, so existiert die lokale Dimension fast überall und ist konstant, es gilt

$$\dim \mu = \dim_H \mu = \dim_M \mu = \dim_x \mu.$$

Ist X eine Fläche so lässt sich die Dimension mit der **Young Formel** berechnen

$$\dim \mu = h(\mu)(\frac{1}{\chi_1(\mu)} - \frac{1}{\chi_2(\mu)}).$$

h ist die Entropie und $\chi_{1/2}$ sind Lyapunov Exponenenten im Bezug auf das Maß.

Im höerdimensionalen Fall gibt es keine allgemeine Formeln zur Berechnung der Dimension.

Das Smale-Williams Solenoid

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \qquad f : \mathbb{T}^2 \longmapsto \mathbb{T}^2$$

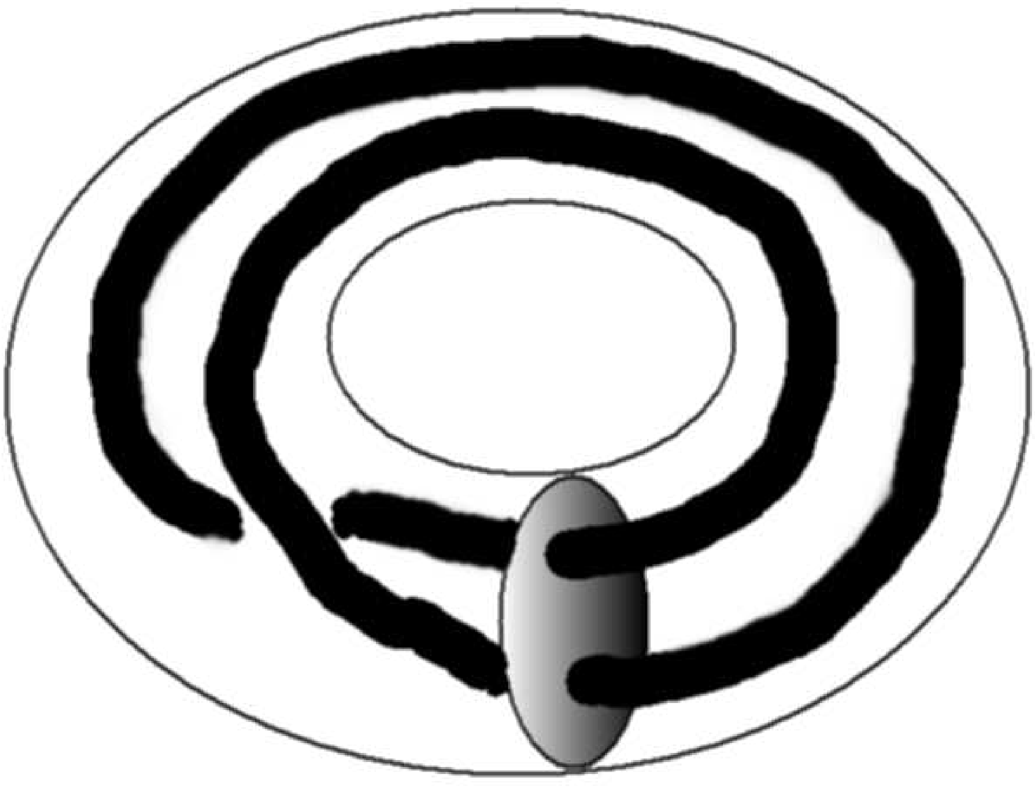
$$f(\phi, x, y) =$$

$$(2\phi \bmod 2\pi, \lambda x + \epsilon \cos(2\pi\phi), \mu y + \epsilon \sin(2\pi\phi))$$

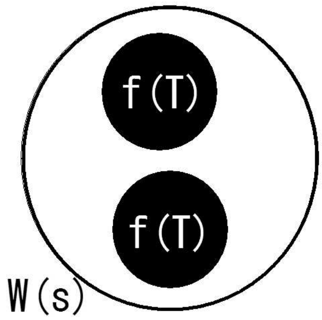
$$\lambda, \mu < \min\{1/2, \epsilon\}$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{T}^2) \quad \text{ist das } \textbf{Solenoid.}$$

Λ ist ein hyperbolischer Attraktor.
$f_{|\Lambda}$ ist chaotisch.



Selbstähnlicher Fall $\lambda = \mu$

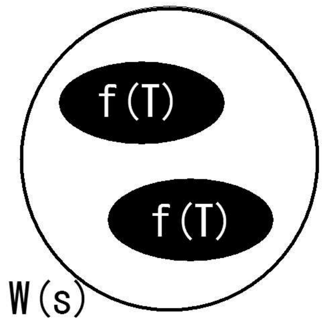


Theorem [Falconer]

$$\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda = -\log 2 / \log \lambda + 1$$

Das gleichgewichtete Bernoulli Maß auf Λ hat volle Dimension.

Allgemeiner Fall $\lambda \neq \mu$



Theorem [Bothe/Simon]

$$\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda = -\log 2 / \log \max\{\lambda, \mu\} + 1$$

Lineare Systeme vom Solenoid Typ

$$\mathbf{Q} = [-1,1]^3 \qquad f : \mathbf{Q} \longmapsto \mathbf{Q}$$

$$f(x,y,z) =$$

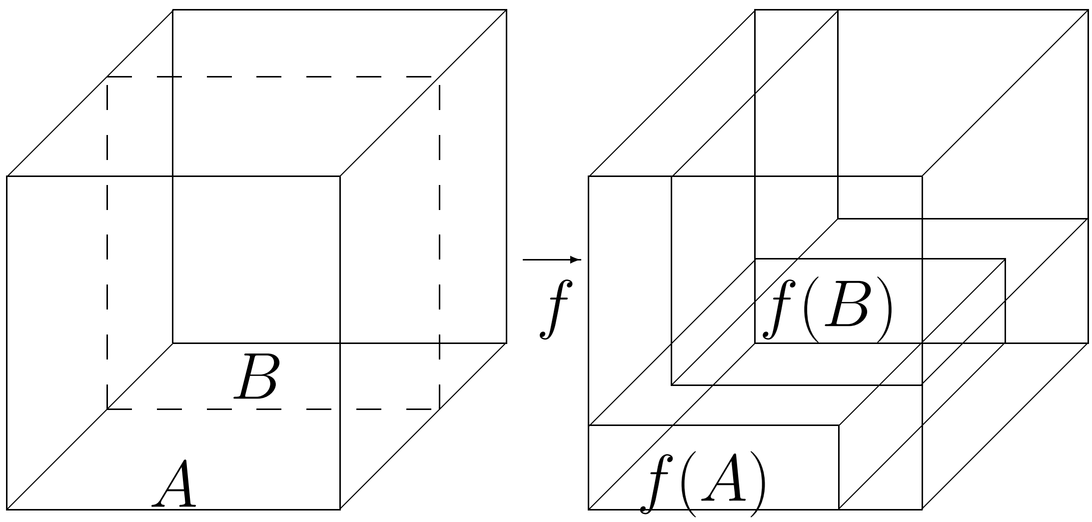
$$\begin{cases} (2x-1, \beta_1 y + (1-\beta_1), \tau_1 z + (1-\tau_1)) & x \geq 0 \\ (2x+1, \beta_2 y - (1-\beta_2), \tau_2 z - (1-\tau_2)) & x < 0 \end{cases}$$

$$\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2 \in (0,1) \quad \tau_1 + \tau_2 < 1$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{Q})$$

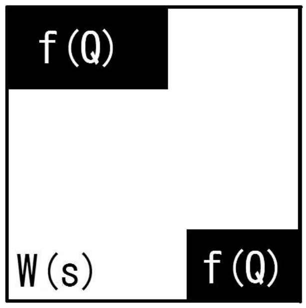
Λ ist ein hyperbolischer Attraktor.

$f_{|\Lambda}$ ist chaotisch.



Nicht überlappende Projektionen

$\beta_1 + \beta_2 < 1$



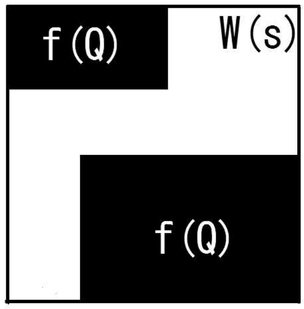
Theorem

$$\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda = d{+}1 \quad \text{mit} \quad \beta_1^d{+}\beta_2^d = 1$$

Ein Maß voller Dimension ex. $\Longleftrightarrow \beta_1 = \beta_2$

Überlappende Projektionen

$\beta_1 + \beta_2 \geq 1$



Theorem

$$\dim_B \Lambda = d + 2 \quad \text{mit} \quad \beta_1 \tau_1^d + \beta_2 \tau_2^d = 1$$

Generisch gilt $\dim_H \Lambda = \dim_M \Lambda$. Ein Maß voller Dimension existiert $\Longleftrightarrow$

$$(2\beta_1)^{\log \tau_2} = (2\beta_2)^{\log \tau_1}.$$

Zahlentheoretische Ausnahmen

Definition
Eine algebraische Zahl α heißt Pisot Zahl wenn alle algebraisch Konjugierten einen Betrag kleiner als Eins haben.

Beispiele
Die Lösungen der Gleichung

$$X^n - X^{n-1} + \ldots - X - 1 = 0, \quad n \geq 2$$

Eigenschaften

$$||\alpha^n||_{\mathbb{Z}} < \rho^n \qquad \rho < 1$$

$$\sharp\{\sum_{k=0}^{n} s_k \alpha^k | s_k = \pm 1\} \leq C\alpha^n$$

Theorem
Ist $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$ eine Pisot Zahl, so gilt

$$\dim_H \Lambda < \dim_M \Lambda$$