

# Resultate über selbstähnliche Wahrscheinlichkeitsmaße und deren Anwendungen

Universität Leipzig

Oktober 2003

von

Jörg Neunhäuserer

neunchen@aol.com

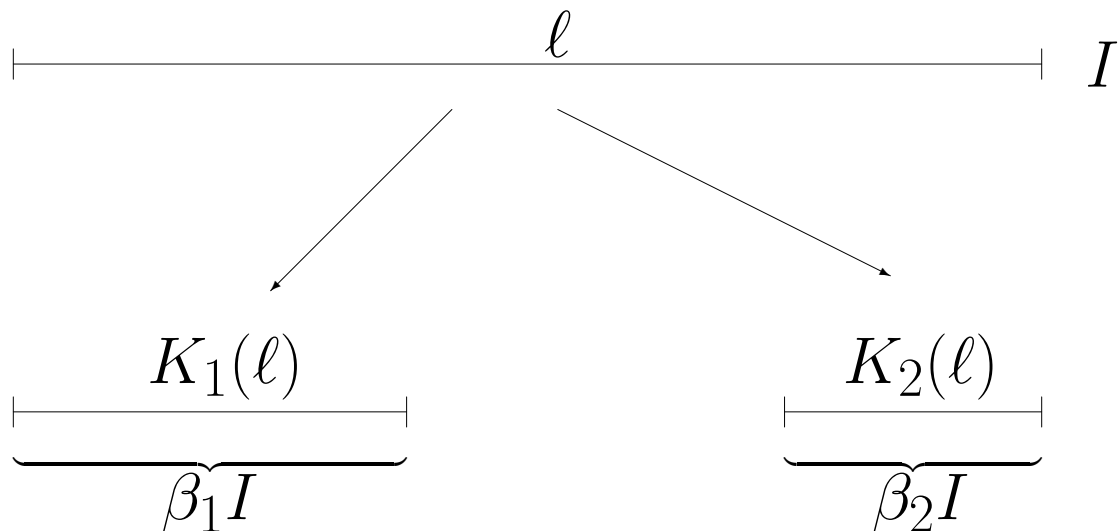
## Konstruktion der Maße

Für  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$  betrachte zwei Kontraktionen auf  $I = [-\beta_2/(1 - \beta_2), \beta_1/(1 - \beta_1)]$

$$K_1x = \beta_1x + \beta_1 \quad K_2x = \beta_2x - \beta_2.$$

Sei  $\ell$  das normierte Lebegues Maß auf  $I$ . Für ein Gewicht  $p \in [0, 1]$  betrachte

$$K(\ell) := pK_1(\ell) + (1 - p)K_2(\ell).$$



Es existiert ein eindeutig bestimmtes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K^N(\ell) = \mu.$$

$\mu$  ist selbstähnlich, das heisst

$$\mu = K(\mu) = pK_1(\mu) + (1 - p)K_2(\mu)$$

Sei  $b$  be das Bernoulli Maß  $(p, 1 - p)$  auf dem Folgenraum  $\Sigma := \{1, -1\}^{\mathbb{N}_0}$ . Sei

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma &\longmapsto I \\ \pi(\mathbf{s}) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \beta_1^{\#_1^k(\mathbf{s})} \beta_2^{\#_{-1}^k(\mathbf{s})} \\ \#_1^k(\mathbf{s}) &= \text{Card}\{i | s_i = 1, i = 0 \dots k\} \\ \#_{-1}^k(\mathbf{s}) &= \text{Card}\{i | s_i = -1, i = 0 \dots k\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mu = \pi(b) = \pi^{-1} \circ b.$$

**Cantor Maße**  $\beta_1 + \beta_2 < 1$

- $\mu$  ist singulär,  $\exists C \subseteq I : \ell(C) = 0 \quad \mu(C) = 1$
- Die Dimension von  $\mu$  ist gegeben durch

$$\dim \mu := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B_\epsilon(x)))}{\log(\epsilon)} = \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)} \quad \text{f.s.}$$

$$h(\mu) = -(p \log p + (1 - p) \log(1 - p))$$

$$\chi(\mu) = -(p \log \beta_1 + (1 - p) \log \beta_2).$$

## Erdős Maße $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$

- Wenn  $h(\mu) < \chi(\mu)$  so ist  $\mu$  singulär mit

$$\dim \mu \leq \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)}.$$

- Wenn  $h(\mu) \geq \chi(\mu)$  so ist  $\mu$  generisch absolut stetig, das heisst

$$\mu = \int f d\ell.$$

- $\mu$  hat generisch eine Dichte  $f$  in  $L^q$  wenn

$$(\beta_2^{q-1} p^q + \beta_1^{q-1} (1-p)^q)^{\frac{1}{q-1}} \leq \beta_1 \beta_2.$$

- Ist  $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$  eine Pisot Zahl so ist  $\mu$  singulär mit

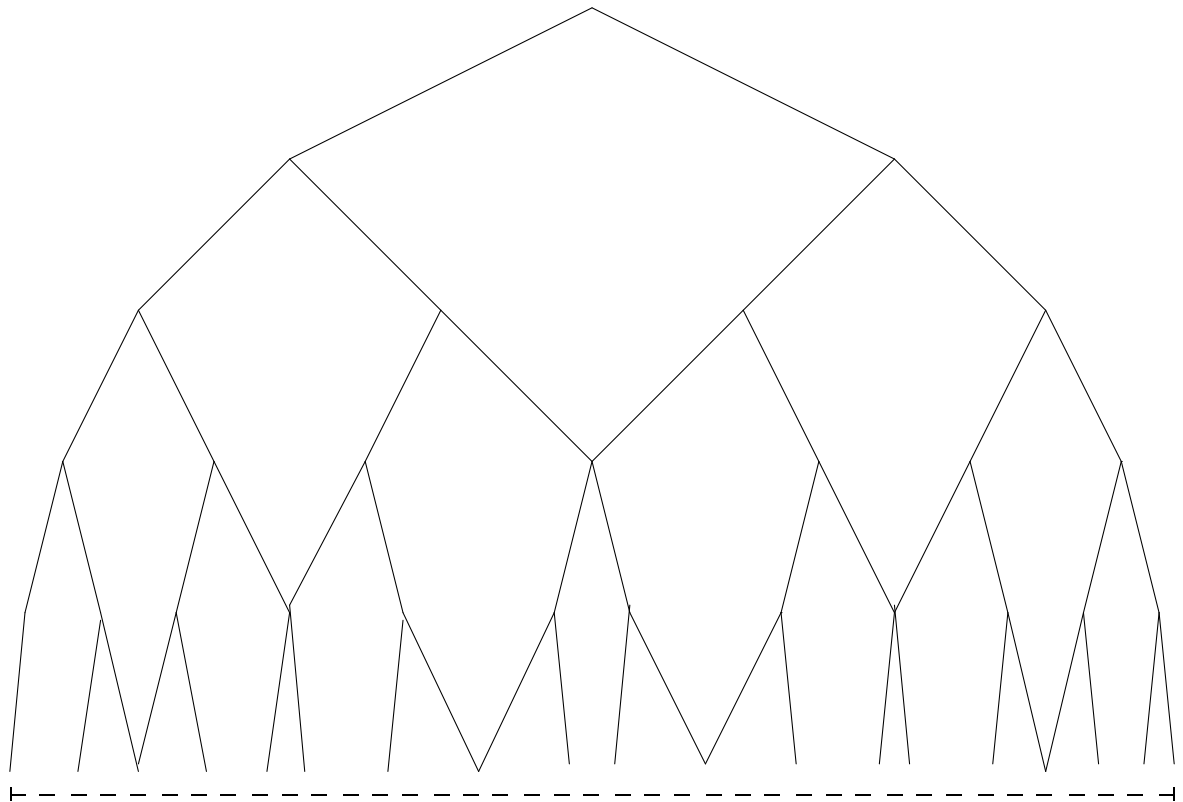
$$\dim \mu = \frac{G_\alpha(\mu)}{\chi(\mu)} = -\frac{G_\alpha(\mu)}{\log \alpha}.$$

$G_\alpha(\mu)$  ist die Entropie eines Zufallsweges auf einem unendlichen binären Baum.

Beispiel:  $\alpha$  goldener Schnitt  $\leftrightarrow$  Fibonacci Baum

Zwei Kanten  $(s_0, \dots, s_n), (t_0, \dots, t_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$   
führen zur gleichen Ecke, wenn

$$\sum_{k=0}^n s_k \alpha^k = \sum_{k=0}^n t_k \alpha^k$$



Betrachte einen Zufallsweg auf dem Baum mit  
Wahrscheinlichkeiten  $(p, 1 - p)$ .  $G_\alpha(\mu)$  ist die  
Entropie dieses Zufallsweges.

**Vermutung:** Das gleichgewichtete Maß  $(0.5, 0.5)$   
auf dem Graphen hat maximale Entropie.

## Beweis Idee: Singularität $h(\mu) < \chi(\mu)$

Definiere eine Metrik auf dem Folgenraum  $\Sigma$

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \beta_1^{\#k}(\mathbf{s}) \beta_2^{\#k-1}(\mathbf{t}) \quad k = \max\{i \mid s_i = t_i\}$$

Es ist bekannt

$$\dim_d b = \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)}$$

Zeige nun, dass die Abbildung  $\pi$  Lipschitz stetig im Bezug zur Metrik  $d$  ist.

## Beweis Idee: Stetigkeit $h(\mu) > \chi(\mu)$

$$D(x, \mu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_r(x))}{2r}$$

ist die lokale Dichte des Maßes. Wenn

$$\int (D(\mu, x))^{q-1} dx < \infty$$

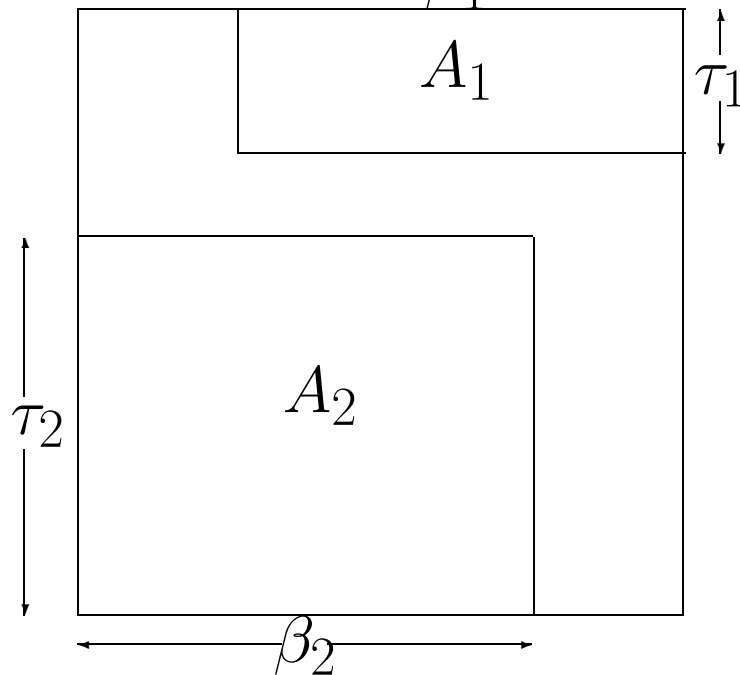
dann ist  $\mu$  absolut stetig mit Dichte in  $L^q$ .  $\mu(\beta)$  sei das selbstähnliche Maß mit  $\beta_1 = \beta$  und  $\beta_2 = c\beta$  für  $c \in (0, 1)$  konstant. Zeige

$$\int \int (D(\mu(\beta), x))^{q-1} dx d\beta < \infty.$$

## Eine Klasse selbst-affiner Mengen

$$A_1(x, y) = (\beta_1 x + \beta_1, \tau_1 y + \tau_1)$$

$$A_2(x, y) = (\beta_2 x - \beta_2, \tau_2 y - \tau_2).$$



Es gibt eine eindeutig bestimmte kompakte Menge  $\Lambda$  mit

$$\Lambda = A_1(\Lambda) \cup A_2(\Lambda).$$

Sei  $d$  die Lösung von

$$\beta_1 \tau_1^d + \beta_2 \tau_2^d = 1.$$

- $\dim_B \Lambda = d + 1$
- Generisch  $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = \dim \mu$

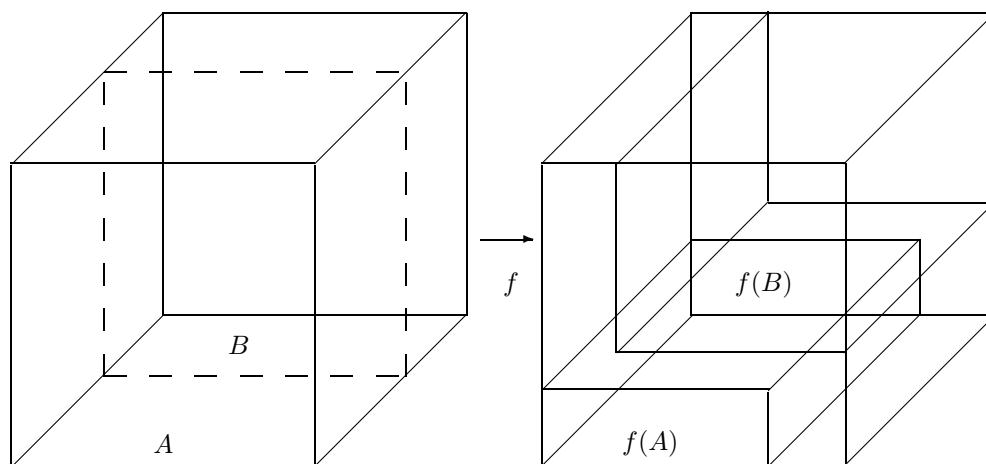
Dies ist eine Verallgemeinerung von *Falconer*.

# Solenoidartige Dynamische Systeme

$$f : [-1, 1]^3 \longmapsto [-1, 1]^3$$

$$f(x, y, z) =$$

$$\begin{cases} (\beta_1 x + (1 - \beta_1), 2y - 1, \tau_1 z + (1 - \tau_1)) & y \geq 0 \\ (\beta_2 x - (1 - \beta_2), 2y + 1, \tau_2 z - (1 - \tau_2)) & y < 0 \end{cases}$$



Betrachte den hyperbolischen Attraktor

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n([-1, 1]^3).$$

$f|_{\Lambda}$  ist ‘chaotisch‘

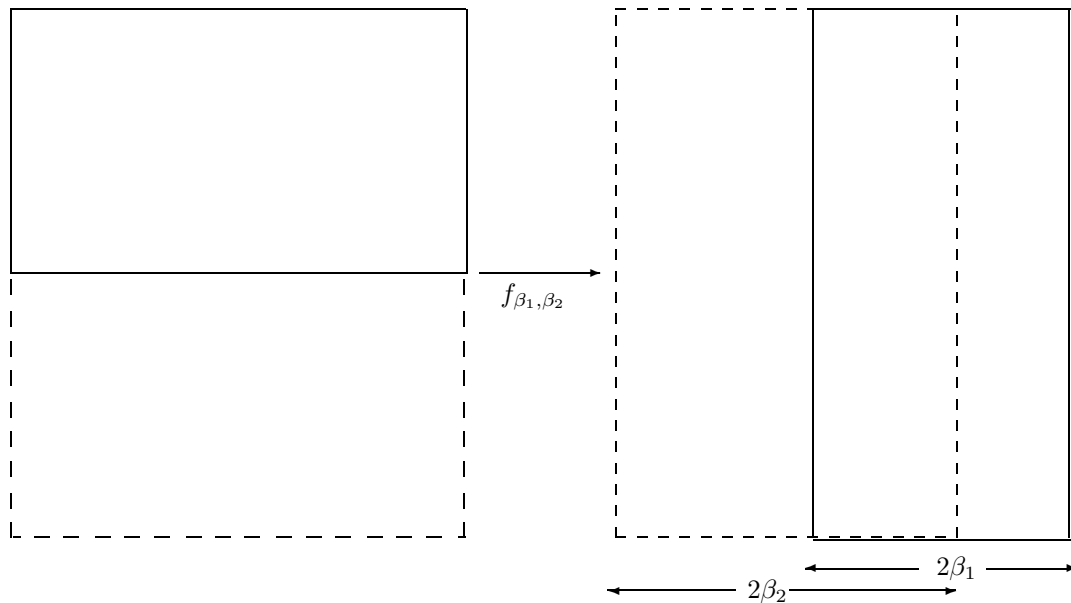
Aus den obigen Resultaten folgt

- $\dim_B \Lambda = d + 2$
- Generisch  $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda$ .

# Baker Transformationen

$$f : [-1, 1]^2 \mapsto [-1, 1]^2$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (\beta_1 x + (1 - \beta_1), 2y - 1) & \text{if } y \geq 0 \\ (\beta_2 x - (1 - \beta_2), 2y + 1) & \text{if } y < 0 \end{cases}$$



Ein Maß  $\mu$  heisst  $f$ -ergodisch, wenn

$$f(\mu) = \mu \text{ und } f(B) = B \Rightarrow \mu(B) \in \{0, 1\}.$$

- Wenn  $\beta_1\beta_2 \geq 1/4$  existiert generisch ein absolut stetiges ergodische Maß für  $f$ .
- Ist  $\beta_1\beta_2 < 1/4$  dann gibt es kein ergodisches Maßvoller Dimension d.h.

$$\sup\{\dim_H \mu \mid \mu \text{ } f\text{-ergodic}\} < 2.$$

