Resultate über selbstähnliche Wahrscheinlichkeitsmaße und deren Anwendungen

Universität Leipzig

Oktober 2003

von

Jörg Neunhäuserer

neunchen@aol.com

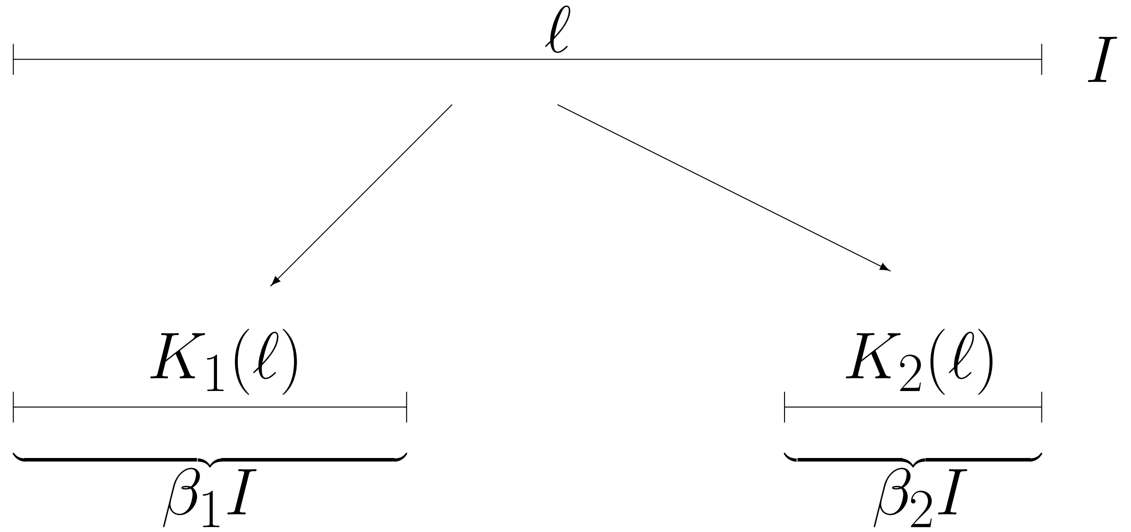
Konstruktion der Maße

Für $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ betrachte zwei Kontraktionen auf $I = [-\beta_2/(1-\beta_2), \beta_1/(1-\beta_1)]$

$$K_1 x = \beta_1 x + \beta_1 \quad K_2 x = \beta_2 x - \beta_2.$$

Sei ℓ das normierte Lebegues Maß auf I. Für ein Gewicht $p \in [0,1]$ betrachte

$$K(\ell) := pK_1(\ell) + (1-p)K_2(\ell).$$



Es existiert ein eindeitig bestimmtes Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit

$$\lim_{N \longmapsto \infty} K^N(\ell) = \mu.$$

μ ist selbstähnlich, das heisst

$$\mu = K(\mu) = pK_1(\mu) + (1-p)K_2(\mu)$$

Sei b be das Bernoulli Maß $(p, 1-p)$ auf dem Folgenraum $\Sigma := \{1, -1\}^{\mathbb{N}_0}$. Sei

$$\pi : \Sigma \longmapsto I$$
$$\pi(\mathbf{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \beta_1^{\sharp_1^k(\mathbf{s})} \beta_2^{\sharp_{-1}^k(\mathbf{s})}$$
$$\sharp_1^k(\mathbf{s}) = Card\{i | s_i = 1, i = 0 \ldots k\}$$
$$\sharp_{-1}^k(\mathbf{s}) = Card\{i | s_i = -1, i = 0 \ldots k\}.$$

Dann gilt

$$\mu = \pi(b) = \pi^{-1} \circ b.$$

Cantor Maße $\beta_1 + \beta_2 < 1$

- μ ist singulär,$\exists C \subseteq I: \ \ell(C) = 0 \ \mu(C) = 1$
- Die Dimension von μ ist gegeben durch

$$\dim \mu := \lim_{\epsilon \longmapsto 0} \frac{\log(\mu(B_\epsilon(x))}{\log(\epsilon)} = \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)} \quad \text{f.s.}$$
$$h(\mu) = -(p \log p + (1-p) \log(1-p))$$
$$\chi(\mu) = -(p \log \beta_1 + (1-p) \log \beta_2).$$

Erdös Maße $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$

• Wenn $h(\mu) < \chi(\mu)$ so ist μ singulär mit

$$\dim \mu \leq \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)}.$$

• Wenn $h(\mu) \geq \chi(\mu)$ so ist μ generisch absolut stetig, das heisst

$$\mu = \int f d\ell.$$

• μ hat generisch eine Dichte f in L^q wenn

$$(\beta_2^{q-1} p^q + \beta_1^{q-1}(1-p)^q)^{\frac{1}{q-1}} \leq \beta_1 \beta_2.$$

• Ist $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$ eine Pisot Zahl so ist μ singulär mit

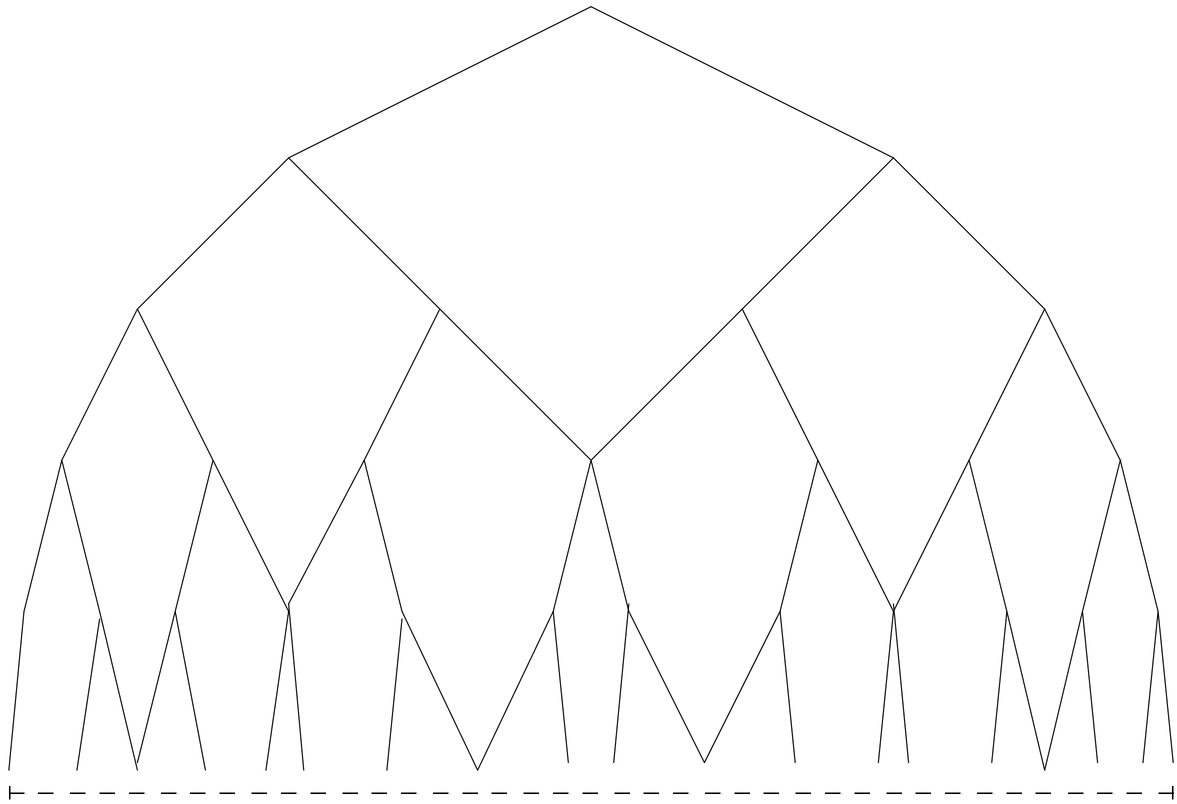
$$\dim \mu = \frac{G_\alpha(\mu)}{\chi(\mu)} = -\frac{G_\alpha(\mu)}{\log \alpha}.$$

$G_\alpha(\mu)$ ist die Entropie eines Zufallsweges auf einem unendlichen binären Baum.

Beispiel:α goldener Schnitt$\hookrightarrow$FibonacciBaum

Zwei Kanten $(s_0, \ldots, s_n), (t_0, \ldots, t_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$ führen zur gleichen Ecke, wenn

$$\sum_{k=0}^{n} s_k \alpha^k = \sum_{k=0}^{n} t_k \alpha^k$$



Betrachte einen Zufallsweg auf dem Baum mit Wahrscheinlichkeiten $(p, 1-p)$. $G_\alpha(\mu)$ ist die Entropie dieses Zufallsweges.

Vermutung: Das gleichgewichtete Maß $(0.5, 0.5)$ auf dem Graphen hat maximale Entropie.

Beweis Idee: Singularität $h(\mu) < \chi(\mu)$

Definiere eine Metrik auf dem Folgenraum Σ

$$d(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \beta_1^{\sharp_1^k(\mathbf{s})} \beta_2^{\sharp_{-1}^k(\mathbf{t})} \quad k = \max\{i | s_i = t_i\}$$

Es ist bekannt

$$\dim_d b = \frac{h(\mu)}{\chi(\mu)}$$

Zeige nun, dass die Abbildung π Lipschitz stetig im Bezug zur Metrik d ist.

Beweis Idee: Stetigkeit $h(\mu) > \chi(\mu)$

$$D(x,\mu) = \lim_{r \longmapsto \infty} \frac{\mu(B_r(x))}{2r}$$

ist die lokale Dichte des Maßes. Wenn

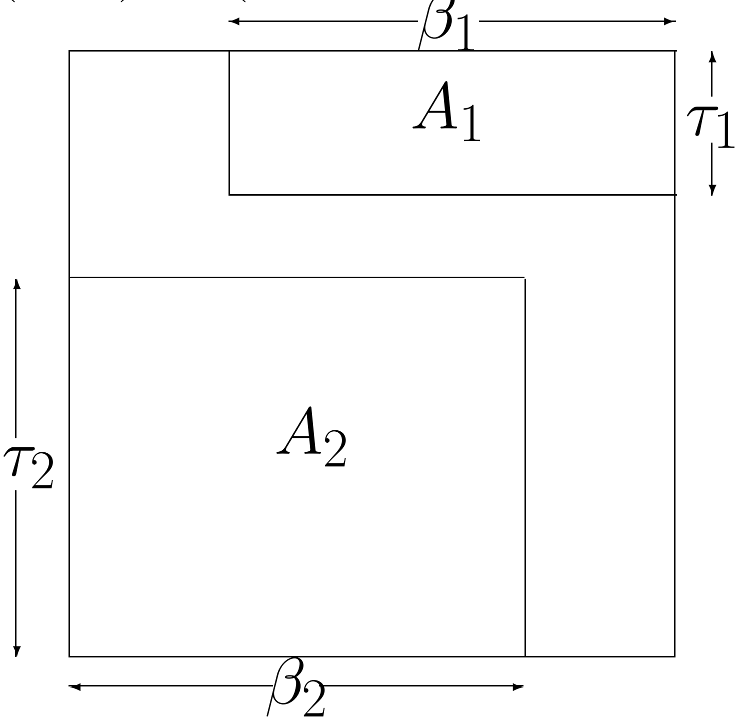
$$\int (D(\mu, x))^{q-1} dx < \infty$$

dann ist μ absolut stetig mit Dichte in L^q. $\mu(\beta)$ sei das selbstähnliche Maß mit $\beta_1 = \beta$ und $\beta_2 = c\beta$ für $c \in (0,1)$ konstant. Zeige

$$\int \int (D(\mu(\beta), x))^{q-1} dx d\beta < \infty.$$

Eine Klasse selbst-affiner Mengen

$$A_1(x,y) = (\beta_1 x + \beta_1, \tau_1 y + \tau_1)$$
$$A_2(x,y) = (\beta_2 x - \beta_2, \tau_2 y - \tau_2).$$



Es gibt eine eindeutig bestimmte kompakte Menge Λ mit

$$\Lambda = A_1(\Lambda) \cup A_2(\Lambda).$$

Sei d die Lösung von

$$\beta_1 \tau_1^d + \beta_2 \tau_2^d = 1.$$

- $\dim_B \Lambda = d + 1$
- Generisch $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = \dim \mu$

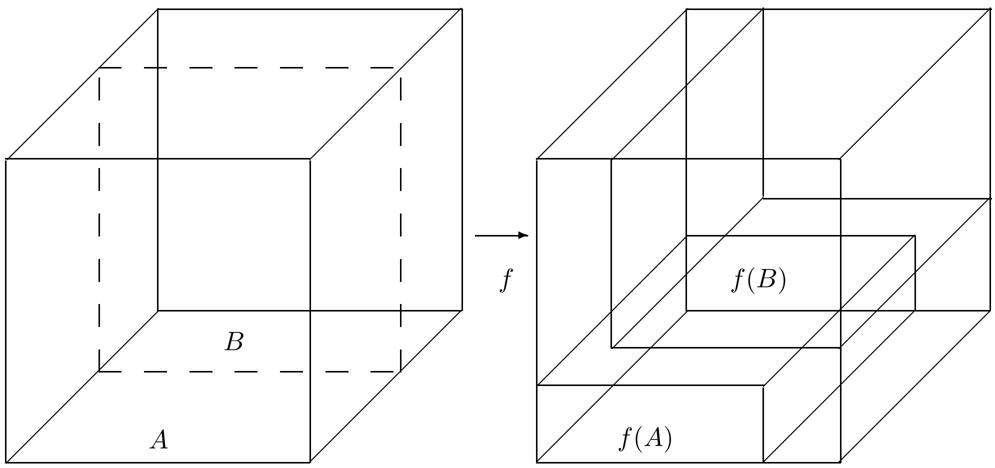
Dies ist eine Verallgemeinerung von *Falconer*.

Solenoidartige Dynamische Systeme

$$f : [-1,1]^3 \longmapsto [-1,1]^3$$

$$f(x,y,z) =$$

$$\begin{cases} (\beta_1 x + (1-\beta_1), 2y-1, \tau_1 z + (1-\tau_1)) & y \geq 0 \\ (\beta_2 x - (1-\beta_2), 2y+1, \tau_2 z - (1-\tau_2)) & y < 0 \end{cases}$$



Betrachte den hyperbolischen Attraktor

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n([-1,1]^3).$$

$f|\Lambda$ ist ‘chaotisch‘

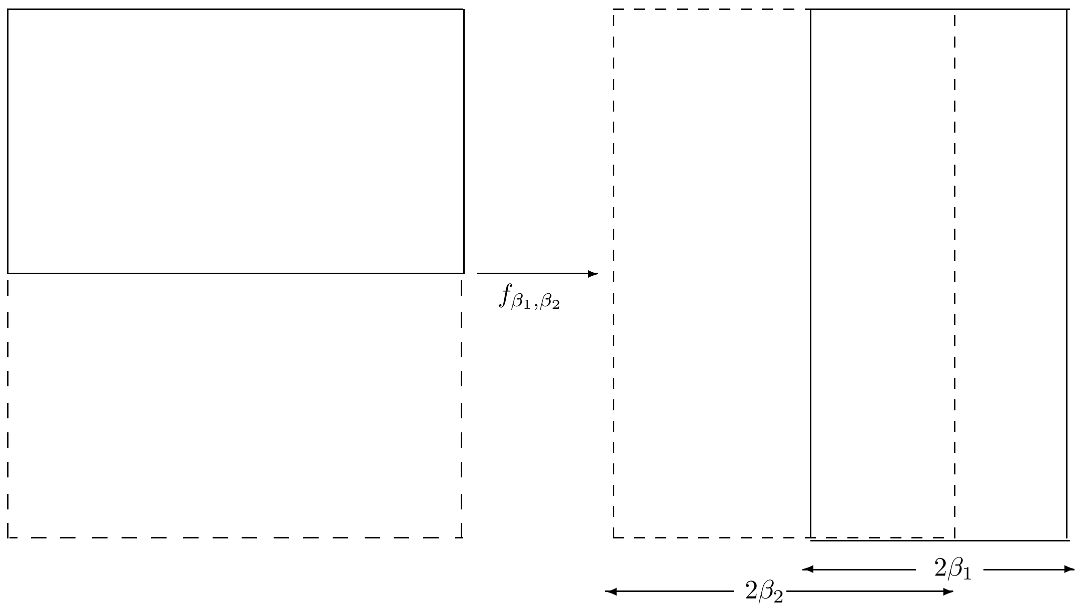
Aus den obigen Resultaten folgt

- $\dim_B \Lambda = d + 2$
- Generisch $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda$.

Baker Transformationen

$$f : [-1,1]^2 \longmapsto [-1,1]^2$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (\beta_1 x + (1-\beta_1), 2y-1) & \text{if} \quad y \geq 0 \\ (\beta_2 x - (1-\beta_2), 2y+1) & \text{if} \quad y < 0 \end{cases}$$



Ein Maß μ heisst f-ergodisch, wenn

$$f(\mu) = \mu \text{ und } f(B) = B \Rightarrow \mu(B) \in \{0,1\}.$$

• Wenn $\beta_1\beta_2 \geq 1/4$ existiert generisch ein absolut stetiges ergodische Maß für f.

• Ist $\beta_1\beta_2 < 1/4$ dann gibt es kein ergodisches Maßvoller Dimension d.h.

$$\sup\{\dim_H \mu | \mu \ \ f\text{-ergodic}\} < 2.$$