

# Dimensionstheorie für Attraktoren vom Solenoid-Typ

Jörg Neunhäuserer

Universität Hamburg

Februar 2003

neunchen@aol.com

# Dimensionstheorie Dynamischer Systeme

$f : X \mapsto X$   $X$  Mannig. ,  $f$  diffbar.

$\Lambda$  invariant d.h.  $f(\Lambda) = \Lambda$

$\Lambda$  ist z.B. Attraktor, Repeller oder hyperbolische Menge.  $\Lambda$  hat im Allgemeinen keine glatte Geometrie sondern eine ‘fraktale Geometrie’  
 $\hookrightarrow$

Hausdorff Dimension  $\dim_H \Lambda$

Box-Counting Dimension  $\dim_B \Lambda$

Dies sind Lipschitzinvarianten der Dynamik.

## Zentrale Fragen:

- $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = ?$
- Sei  $\mu$  ein  $f$ -ergodisches Maß  $\mu$  auf  $\Lambda$   
 $\dim_H \mu = \dim_B \mu = \dim_{loc} \mu = ?$
- $\exists \mu$   $f$ -ergodisch mit  $\dim_H \mu = \dim_H \Lambda$   
( $\mu$  heißt Maß voller Hausdorff Dimension)

## Drei allgemeine Resultate

*Theorem [Ruelle, Falconer]*

Ist  $f$  konform expandierend und  $\Lambda$  ein Repeller so gilt

$$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = s$$

wobei  $s$  die Bowen-Gleichung erfüllt

$$P(-s \log |D_x f|) = 0$$

Es existiert ein Maß voller Dimension.

*Theorem [Barreira, Pesin, Schmeling]*

Ist  $\mu$  ein hyperbolisches Maß, so existiert die lokale Dimension fast überall und ist konstant, damit

$$\dim_H \mu = \dim_B \mu = \dim_{loc} \mu.$$

*Theorem [Young]*

Ist  $X$  eine Fläche und  $\mu$  hyperbolisch, so gilt

$$\dim \mu = h(\mu) \left( \frac{1}{\chi_1(\mu)} - \frac{1}{\chi_2(\mu)} \right).$$

## Das Smale-Williams Solenoid

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \quad f : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$$

$$f(\phi, x, y) =$$

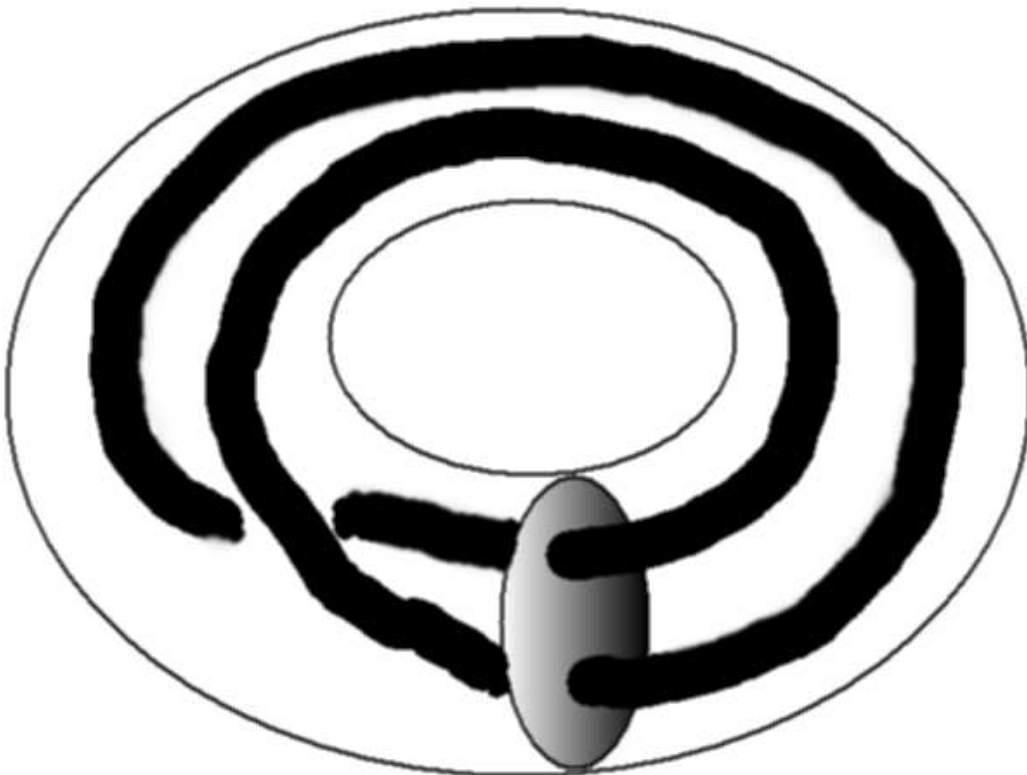
$$(2\phi \bmod 2\pi, \lambda x + \epsilon \cos(2\pi\phi), \mu y + \epsilon \sin(2\pi\phi))$$

$$\lambda, \mu < \min\{1/2, \epsilon\}$$

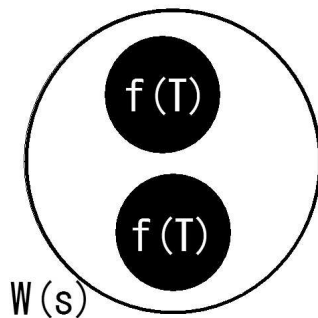
$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{T}^2) \quad \text{ist das **Solenoid** .}$$

$\Lambda$  ist ein hyperbolischer Attraktor.

$f|_{\Lambda}$  ist konjugiert zu einem 2-Shift.



## Selbstähnlicher Fall $\lambda = \mu$

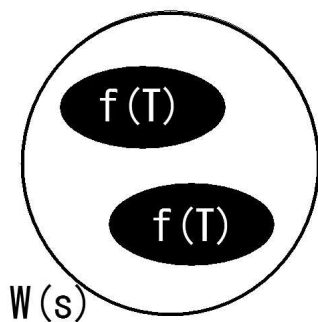


*Theorem [Falconer]*

$$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = -\log 2 / \log \lambda + 1$$

Das gleichgewichtete Bernoulli Maß auf  $\Lambda$  hat volle Dimension.

## Allgemeiner Fall $\lambda \neq \mu$



*Theorem [Bothe/Simon]*

$$\dim_B \Lambda = \dim_H \Lambda = -\log 2 / \log \max\{\lambda, \mu\} + 1$$

# Lineare Systeme vom Solenoid Typ

$$\mathbf{Q} = [-1, 1]^3 \quad f : \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{Q}$$

$$f(x, y, z) =$$

$$\begin{cases} (2x - 1, \beta_1 y + (1 - \beta_1), \tau_1 z + (1 - \tau_1)) & x \geq 0 \\ (2x + 1, \beta_2 y - (1 - \beta_2), \tau_2 z - (1 - \tau_2)) & x < 0 \end{cases}$$

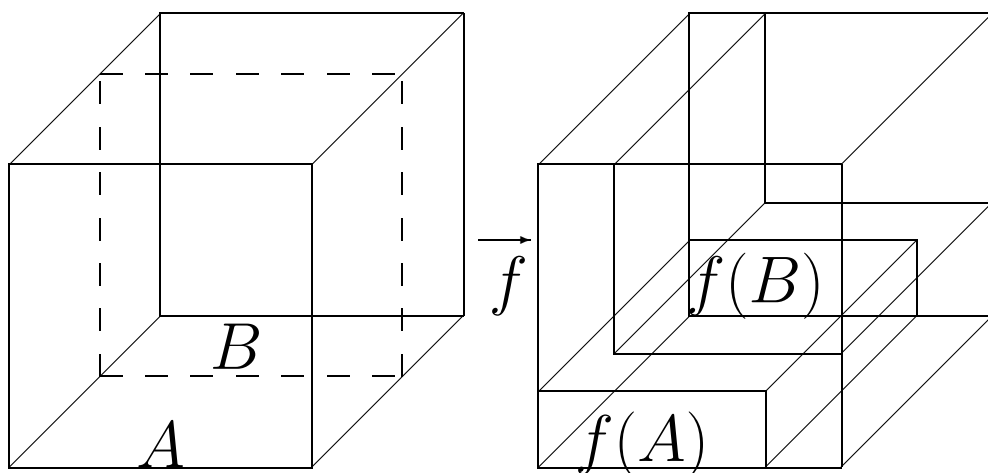
$$\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2 \in (0, 1) \quad \tau_1 + \tau_2 < 1$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{Q})$$

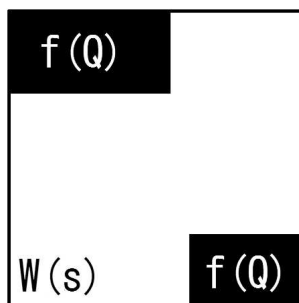
$\Lambda$  ist ein verallgem. hyperbolischer Attraktor.

$f|_{\Lambda}$  ist semi-konjugiert zu einem 2-Shift.

Die Singularität  $x = 0$  hat Maß Null.



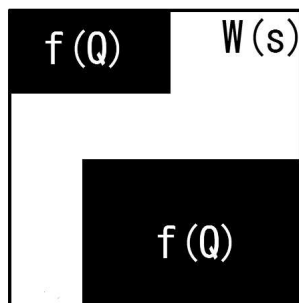
## Nicht überlappende Projektionen



### *Theorem*

Ist  $\beta_1, \beta_2 > \tau_1, \tau_2$  und  $\beta_1 + \beta_2 < 1$  gilt  
 $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = d+1$  mit  $\beta_1^d + \beta_2^d = 1$   
 Ein Maß voller Dimension ex.  $\iff \beta_1 = \beta_2$

## Überlappende Projektionen $\beta_1 + \beta_2 > 1$



### *Theorem*

$\dim_B \Lambda = d + 2$  mit  $\beta_1 \tau_1^d + \beta_2 \tau_2^d = 1$   
 Generisch gilt  $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda$ . Ein Maß  
 voller Dimension existiert  $\iff$

$$(2\beta_1)^{\log \tau_2} = (2\beta_2)^{\log \tau_1}.$$

# Zahlentheoretische Ausnahmen

## *Definition*

Eine algebraische Zahl  $\alpha$  heißt Pisot Zahl wenn alle algebraisch Konjugierten einen Betrag kleiner als Eins haben.

## *Beispiele*

Die Lösungen der Gleichung

$$X^n - X^{n-1} + \dots - X - 1 = 0, \quad n \geq 2$$

## *Eigenschaften*

$$\|\alpha^n\|_{\mathbb{Z}} < \rho^n \quad \rho < 1$$

$$\#\left\{ \sum_{k=0}^n s_k \alpha^k \mid s_k = \pm 1 \right\} \leq C \alpha^n$$

## *Theorem*

Ist  $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$  eine Pisot Zahl, so gilt

$$\dim_H \Lambda < \dim_B \Lambda$$

## Ein Resultat in geom. Maßtheorie

Für  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$  sei

$$L_1x = \beta_1x + \beta_1 \quad L_2x = \beta_2x - \beta_2$$

Für  $p \in [0, 1]$  existiert ein eindeutiges Borelsches W-Maß  $\mu$  mit der Selbstähnlichkeit

$$\mu = pL_1(\mu) + (1 - p)L_2(\mu)$$

Sei

$$h(\mu) = -(p \log p + (1 - p) \log(1 - p))$$

$$\chi(\mu) = -(p \log \beta_1 + (1 - p) \log \beta_2)$$

*Theorem*

- Ist  $\beta_1 + \beta_2 < 1$ , so ist  $\mu$  singulär mit  $\dim \mu = h(\mu)/\chi(\mu)$
- Ist  $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$  und  $h(\mu) < \chi(\mu)$ , so ist  $\mu$  singulär mit  $\dim \mu \leq h(\mu)/\chi(\mu)$
- Ist  $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$ , so ist  $\mu$  generisch absolut stetig wenn  $h(\mu) \geq \chi(\mu)$
- Ist  $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$  eine Pisot Zahl so gilt  $\dim_H \mu < 1$

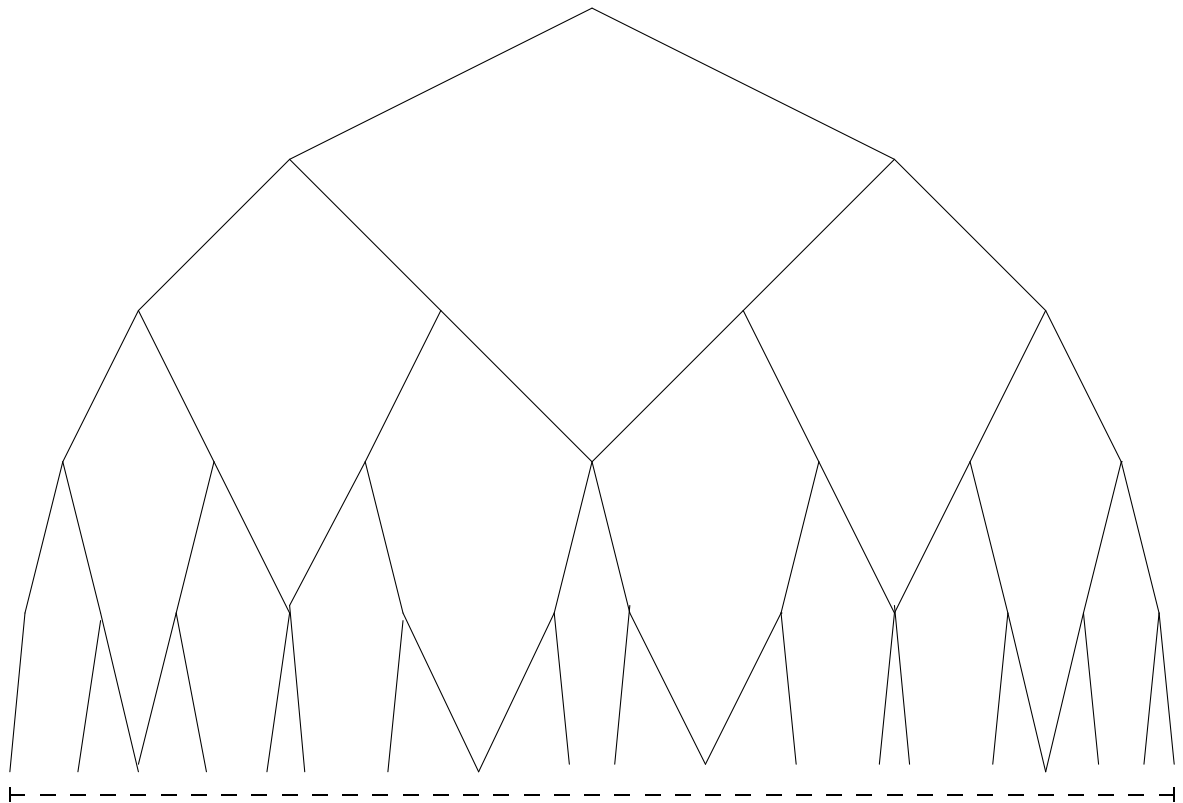
## Zufallswege auf binären Graphen

Ist  $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$  eine Pisot Zahl so gilt

$$\dim_H \mu = G_\alpha(\mu) / \log \alpha$$

wobei  $G_\alpha(\mu)$  die Entropie eines Zufallsweges auf einem unendlichen binären Graphen ist.

*Beispiel:*  $\alpha$  goldener Schnitt  $\leftrightarrow$  Fibonacci Graph



*Vermutung:* Das gleichgewichtete Bernoulli Maß auf dem Graphen hat maximale Entropie  
*Weg:* Entwickle den Thermodynamischen Formalismus für solche Systeme