Dimensionstheorie für Attraktoren vom Solenoid-Typ

Jörg Neunhäuserer

Universität Hamburg

Februar 2003

neunchen@aol.com

Dimensionstheorie Dynamischer Systeme

$$f : X \longmapsto X \quad X \text{ Mannig. }, f \text{ diffbar.}$$

$$\Lambda \text{ invariant d.h. } f(\Lambda) = \Lambda$$

Λ ist z.B. Attraktor, Repeller oder hyperboli sche Menge. Λ hat im Allgemeinen keine glatte Geometrie sondern eine 'fraktale Geometrie' $\hookrightarrow$

Hausdorff Dimension $\dim_H \Lambda$
Box-Counting Dimension $\dim_B \Lambda$

Dies sind Lipschitzinvarianten der Dynamik.

Zentrale Fragen:

- $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = ?$
- Sei μ ein f-ergodisches Maß μ auf Λ
  $\dim_H \mu = \dim_B \mu = \dim_{loc} \mu = ?$
- $\exists \mu \ f-$ ergodisch mit $\dim_H \mu = \dim_H \Lambda$
  (μ heißt Maß voller Hausdorff Dimension)

Drei allgemeine Resultate

Theorem [Ruelle, Falconer]

Ist f konform expandierend und Λ ein Repeller so gilt

$$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = s$$

wobei s die Bowen-Gleichung erfüllt

$$P(-s \log |D_x f|) = 0$$

Es existiert ein Maß voller Dimension.

Theorem [Barreira, Pesin, Schmeling]

Ist μ ein hyperbolisches Maß, so existiert die lokale Dimension fast überall und ist konstant, damit

$$\dim_H \mu = \dim_B \mu = \dim_{loc} \mu.$$

Theorem [Young]

Ist X eine Fläche und μ hyperbolisch, so gilt

$$\dim \mu = h(\mu)(\frac{1}{\chi_1(\mu)} - \frac{1}{\chi_2(\mu)}).$$

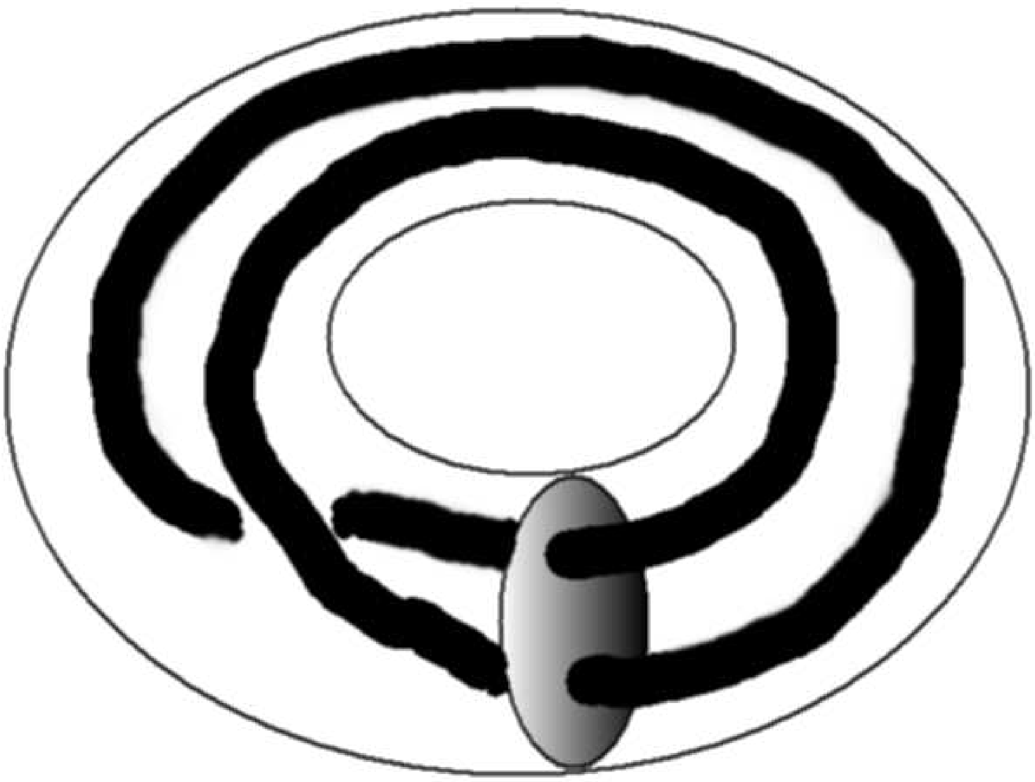
Das Smale-Williams Solenoid

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \qquad f : \mathbb{T}^2 \longmapsto \mathbb{T}^2$$

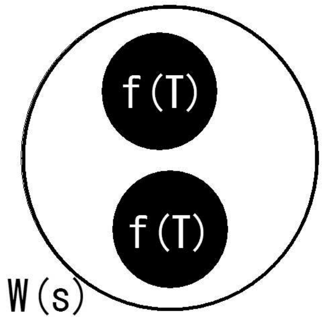
$$f(\phi, x, y) =$$
$$(2\phi \bmod 2\pi, \lambda x + \epsilon\cos(2\pi\phi), \mu y + \epsilon\sin(2\pi\phi))$$
$$\lambda, \mu < \min\{1/2, \epsilon\}$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{T}^2) \quad \text{ist das } \textbf{Solenoid.}$$

Λ ist ein hyperbolischer Attraktor.
$f_{|\Lambda}$ ist konjugiert zu einem 2-Shift.



Selbstähnlicher Fall $\lambda = \mu$

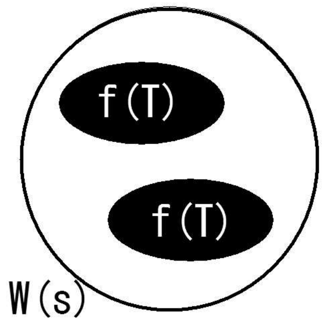


Theorem [Falconer]

$$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = -\log 2 / \log \lambda + 1$$

Das gleichgewichtete Bernoulli Maß auf Λ hat volle Dimension.

Allgemeiner Fall $\lambda \neq \mu$



Theorem [Bothe/Simon]

$$\dim_B \Lambda = \dim_H \Lambda = -\log 2 / \log \max\{\lambda, \mu\} + 1$$

Lineare Systeme vom Solenoid Typ

$$\mathbf{Q} = [-1,1]^3 \qquad f : \mathbf{Q} \longmapsto \mathbf{Q}$$

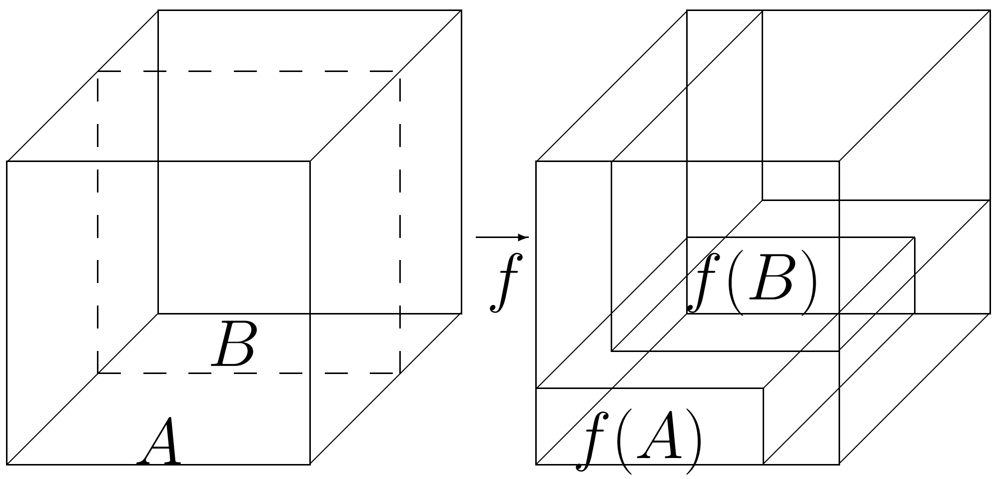
$$f(x,y,z) =$$

$$\begin{cases} (2x-1, \beta_1 y + (1-\beta_1), \tau_1 z + (1-\tau_1)) & x \geq 0 \\ (2x+1, \beta_2 y - (1-\beta_2), \tau_2 z - (1-\tau_2)) & x < 0 \end{cases}$$

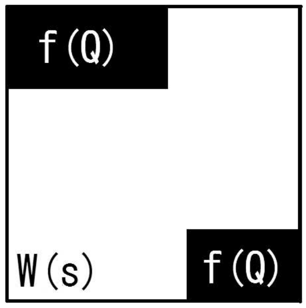
$$\beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2 \in (0,1) \quad \tau_1 + \tau_2 < 1$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{Q})$$

Λ ist ein verallgem. hyperbolischer Attraktor.
$f_{|\Lambda}$ ist semi-konjugiert zu einem 2-Shift.
Die Singularität $x = 0$ hat Maß Null.



Nicht überlappende Projektionen



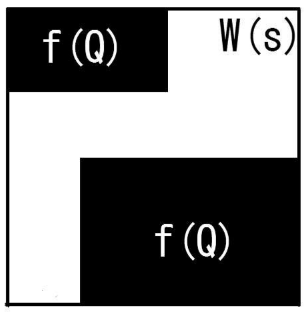
Theorem

Ist $\beta_1, \beta_2 > \tau_1, \tau_2$ und $\beta_1 + \beta_2 < 1$ gilt

$\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda = d{+}1 \quad \text{mit} \quad \beta_1^d{+}\beta_2^d = 1$

Ein Maß voller Dimension ex. $\Longleftrightarrow \beta_1 = \beta_2$

Überlappende Projektionen $\beta_1{+}\beta_2 > 1$



Theorem

$$\dim_B \Lambda = d + 2 \quad \text{mit} \quad \beta_1 \tau_1^d + \beta_2 \tau_2^d = 1$$

Generisch gilt $\dim_H \Lambda = \dim_B \Lambda$. Ein Maß voller Dimension existiert $\Longleftrightarrow$

$$(2\beta_1)^{\log \tau_2} = (2\beta_2)^{\log \tau_1}.$$

Zahlentheoretische Ausnahmen

Definition
Eine algebraische Zahl α heißt Pisot Zahl wenn alle algebraisch Konjugierten einen Betrag kleiner als Eins haben.

Beispiele
Die Lösungen der Gleichung

$$X^n - X^{n-1} + \ldots - X - 1 = 0, \quad n \geq 2$$

Eigenschaften

$$||\alpha^n||_{\mathbb{Z}} < \rho^n \qquad \rho < 1$$

$$\sharp\{\sum_{k=0}^{n} s_k \alpha^k | s_k = \pm 1\} \leq C\alpha^n$$

Theorem
Ist $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$ eine Pisot Zahl, so gilt

$$\dim_H \Lambda < \dim_B \Lambda$$

Ein Resultat in geom. Maßtheorie

Für $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ sei

$$L_1 x = \beta_1 x + \beta_1 \quad L_2 x = \beta_2 x - \beta_2$$

Für $p \in [0,1]$ existiert ein eindeutiges Borelsches W-Maß μ mit der Selbstähnlichkeit

$$\mu = pL_1(\mu) + (1-p)L_2(\mu)$$

Sei

$$h(\mu) = -(p \log p + (1-p)\log(1-p))$$

$$\chi(\mu) = -(p \log \beta_1 + (1-p)\log \beta_2)$$

Theorem

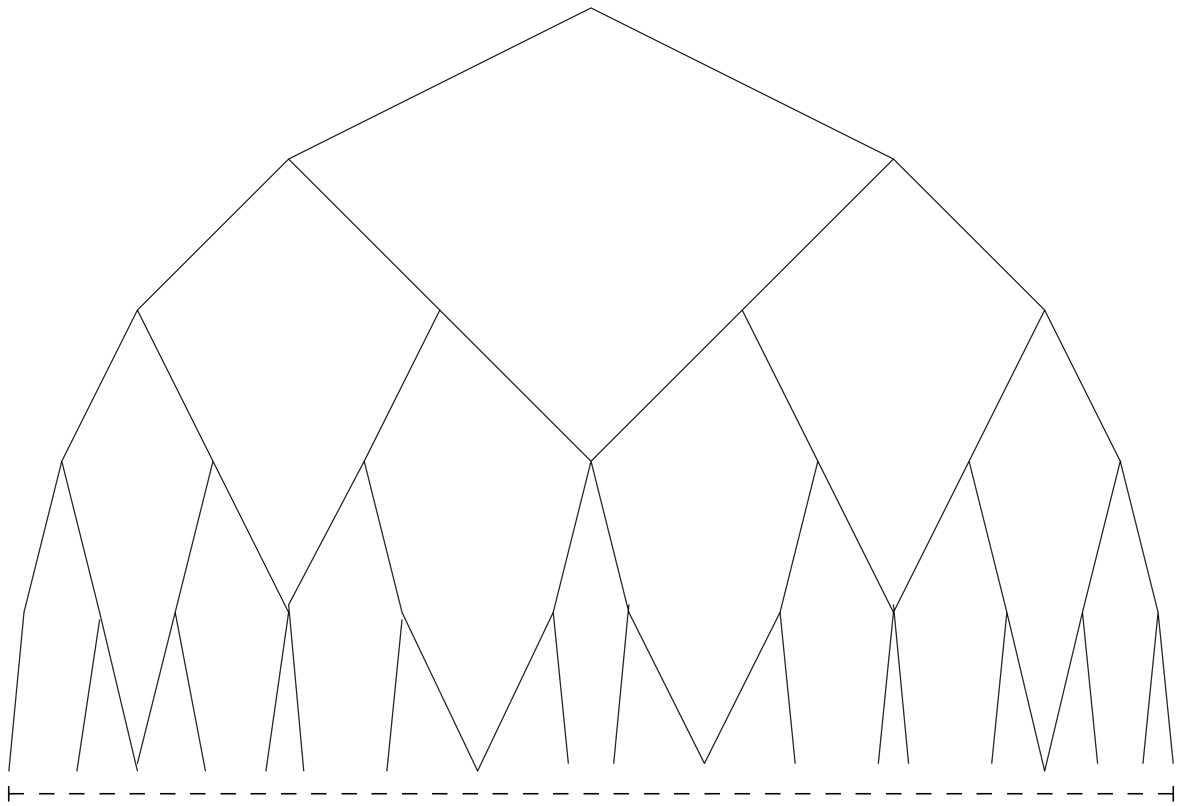
- Ist $\beta_1 + \beta_2 < 1$, so ist μ singulär mit $\dim \mu = h(\mu)/\chi(\mu)$
- Ist $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$ und $h(\mu) < \chi(\mu)$, so ist μ singulär mit $\dim \mu \leq h(\mu)/\chi(\mu)$
- Ist $\beta_1 + \beta_2 \geq 1$, so ist μ generisch absolut stetig wenn $h(\mu) \geq \chi(\mu)$
- Ist $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$ eine Pisot Zahl so gilt $\dim_H \mu < 1$

Zufallswege auf binären Graphen

Ist $\alpha = \beta_1^{-1} = \beta_2^{-1}$ eine Pisot Zahl so gilt

$$\dim_H \mu = G_\alpha(\mu) / \log \alpha$$

wobei $G_\alpha(\mu)$ die Entopie eines Zufallsweges auf einem unendlichen binären Graphen ist.
Beispiel:α goldener Schnitt$\hookrightarrow$ Fibonacci Graph



Vermutung: Das geleichgwichtete Bernoulli Maß auf dem Graphen hat maximale Entropie
Weg: Entwickle den Thermondynmaischen Formalismus für solche Systeme