4 Abstrakte Realität

Übersicht

4.1 Platonische Ideen und Abstrakta 39
4.2 Die Gegenstände der Mathematik 41
4.3 Die Kontinuumshypothese 43
4.4 Strukturen 45

4.1 Platonische Ideen und Abstrakta

Schon vor 2500 Jahren stellt der vorsokratische Philosoph Parmenides von Elea (ca. 515 v. Chr. bis 445 v. Chr.) fest, dass es in der sinnlich gegebenen physikalischen Realität kein zeitloses Sein gibt. Er beschreibt das Sein als vollkommene Kugel, also als einen abstrakten und nicht physikalischen Gegenstand. Wir haben im ersten Kapitel gesehen, dass die physikalische Realität tatsächlich eine Welt des Werdens und nicht des zeitlosen Seins ist. Wir stimmen insofern mit Parmenides überein. Die physikalische Raumzeit selbst mag zwar zeitlos sein, dies ist aber nur eine analytische Selbstverständlichkeit. Parmenides möchte weiterhin das zeitlose Sein mit dem Denken identifizieren. Wir haben im zweiten Kapitel gesehen, dass die mentale Realität ebenso wie die physikalische Realität eine Welt des Werdens und nicht des Seins ist. Die Identifikation von zeitlosem Sein und Denken ist damit ausgeschlossen. Es bleiben nur abstrakte Gegenstände, wie die Kugel, als potenzielle Kandidaten für ein zeitloses Sein. Eben solche Gegenstände sind das Thema dieses Kapitels.

Vermutlich angeregt durch Parmenides entwickelt der antike Philosoph Platon (428–348 v. Chr.) seine berühmte Ideenlehre, in der er versucht, die zeitlose Realität zu beschreiben.[1] Eine Idee im Sinne Platons ist ein körperloses, zeitloses, einfaches und vollkommenes Seiendes. Ideen sind nicht durch die sinnliche Wahr-

[1] Platon entwickelt die Ideenlehre hauptsächlich in den Werken *Phaidon*, *Politeia*, *Phaidros* und *Parmenides*, die zu den mittleren Dialogen gehören, siehe Platon (1991-1993)

nehmung zugänglich, da sie nicht im physikalischen Raum lokalisiert sind, und sie sind keine mentalen Vorgänge, da sie zeitlos sind. Physikalische Gegenstände haben für Platon Anteil an Ideen, indem sie das Wesen der Ideen unvollständig und unvollkommen aufweisen und in diesem Sinne an ihnen beteiligt sind. Die Ideen sind nach Platon entsprechend ihrem Grad an Allgemeinheit geordnet: Das Allgemeinere ist höherrangig und umfasst das Speziellere; das Spezielle hat Anteil am Allgemeinen. Insbesondere sind mathematische Gegenstände in ihrer eigentlichen Form für Platon Ideen und damit körperlos, überzeitlich und unveränderlich. Ein gezeichnetes geometrisches Objekt stellt ein ungenaues Abbild der Idee des geometrischen Objekts dar, die das Urbild des Objekts ist. So ist ein mit dem Zirkel gezogener Kreis nicht der eigentliche Gegenstand der Geometrie; vielmehr ist es die Idee des Kreises, mit der sich die Geometrie befasst. Genauso verbirgt sich hinter jeder einzelnen Zahl eine entsprechende Idee, und diese Ideen beschäftigen die Arithmetik. Die Idee der Einheit stellt für Platon den Ursprung und das Ordnungsprinzip nicht nur der Zahlen, sondern auch der Vielfalt aller Ideen dar. Daneben nimmt die Idee des Guten eine herausragende Stellung ein. Platon betrachtet sie als das höchste Prinzip, dem die anderen Ideen ihr Sein und ihre Erkennbarkeit verdanken.

Unsere Konzeption der abstrakten Realität ist an Platons Ideenlehre angelehnt, übernimmt diese aber nur teilweise. Wir sprechen von Abstrakta und nicht von Ideen, da der Begriff der Idee im modernen Sprachgebrauch als ein Produkt mentaler Vorgänge verstanden wird. Ein Abstraktum in unserem Sinne ist ein zeitloser, unveränderlicher und akausaler Gegenstand. Es ist damit kein physikalischer oder mentaler Vorgang und auch kein Produkt solcher Vorgänge. Die abstrakte Realität enthält alle abstrakten Gegenstände. Die Ähnlichkeit unserer Abstrakta mit Platons Ideen ist offensichtlich. Es gibt allerdings einige wesentliche Unterschiede. Wir unterstellen nicht, dass physikalische Gegenstände bzw. Vorgänge Anteil an Abstrakta haben. Die Relation zwischen abstrakter und physikalischer Realität ist andersartig; wir gehen hierauf in Kapitel ? näher ein. Des Weiteren unterstellen wir keine einfache hierarchische Ordnung der Abstrakta, die in einer Einheit oder dem Guten gipfelt. Auch in dieser Hinsicht ist unsere Philosophie eine Philosophie der Vielheit und nicht der Einheit.

Es stellen sich nun zwei Fragen. Die erste lautet, ob es Abstrakta im Sinne unserer Definition tatsächlich gibt. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass die Gegenstände der Mathematik, wie Zahlen oder geometrische Objekte, also Kreise, Kugeln usw., Abstrakta sind, die unabhängig von mentalen und physikalischen Vorgängen existieren. Die zweite Frage lautet, wie wir Erkenntnisse über abstrakte Gegenstände, also insbesondere mathematische Erkenntnisse, gewinnen können. Mit dieser Frage setzen wir uns im nächsten Kapitel auseinander.

4.2 Die Gegenstände der Mathematik

Die Gegenstände mathematischer Forschung sind Mengen, Relationen, Funktionen, Zahlen, Operationen, algebraische Strukturen, Räume, Formen, Gestalten, Maße usw. Die formale Definition dieser Gegenstände ist eine wesentliche Grundlage der Mathematik. Die philosophische Frage, um was für eine Art von Gegenständen es sich jenseits des mathematischen Formalismus handelt, bleibt hierbei offen.

Wir behaupten, dass mathematische Gegenstände im Sinne der Definition im letzten Abschnitt Abstrakta sind. Die Gegenstände der Mathematik existieren jenseits des mathematischen Formalismus und sind kein Teil der physikalischen oder mentalen Realität. Vielmehr konstituieren sie die abstrakte Realität, den dritten Gegenstandsbereich unserer pluralistischen Metaphysik. Man kann diese Position als einen platonischen Realismus in der Philosophie der Mathematik verstehen.

Unsere Perspektive auf die Mathematik ist unter reinen Mathematikern durchaus verbreitet und findet auch in der zeitgenössischen Philosophie Zuspruch.[2] Wir stellen hier eine ganze Reihe von Argumenten vor, die für unseren platonischen Realismus in der Philosophie der Mathematik sprechen. Zunächst begründen wir die Existenz mathematischer Gegenstände jenseits des mathematischen Formalismus. Die Mathematik macht wahre Aussagen über ihre Gegenstände. Würden diese nicht existieren, wäre dies nicht möglich. Die Aussage *Sieben ist eine Primzahl* kann nur dann wahr sein, wenn es die Zahl *Sieben* gibt. Wir setzen hier eine Korrespondenztheorie der Wahrheit voraus, d. h. eine Aussage ist wahr, wenn sie einen Sachverhalt zur Sprache bringt. Wenn es die Zahl *Sieben* nicht gäbe, würde die Aussage *Sieben ist eine Primzahl* keinen Sachverhalt zur Sprache bringen.[3] Ein weiteres Argument für die Existenz mathematischer Gegenstände beruht auf einem normativen wissenschaftlichen Prinzip. Wir sollten die Existenz all derjenigen Gegenstände als real annehmen, die in unseren besten wissenschaftlichen Theorien unverzichtbar sind. Dass mathematische Gegenstände in unseren besten wissenschaftlichen Theorien un-

[2] In einer Befragung von 931 Philosophen durch PhilPapers ist der Platonismus in Bezug auf abstrakte Gegenstände die am häufigsten vertretene Position, siehe https://philpapers.org/surveys/. Unter Mathematikern scheint uns der Platonismus noch wesentlich verbreiteter zu sein als unter Philosophen.

[3] Dieses Argument geht in seiner Essenz auf den deutschen Logiker und Philosophen Gottlob Frege (1848–1925) zurück und findet unter Philosophen Zuspruch; siehe hierzu Frege (1884).

verzichtbar sind, bestreitet kaum ein Philosoph. Daher sollten wir die Existenz dieser Gegenstände als real annehmen.[4]

Wir argumentieren nun dafür, dass sich die Gegenstände der Mathematik nicht in der physikalischen Realität finden. Wie im ersten Kapitel erläutert, befinden sich physikalische Gegenstände bzw. Prozesse zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort. Mathematische Gegenstände befinden sich aber nicht zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort und sind damit nicht Teil der physikalischen Realität. Es macht offenbar keinen Sinn, danach zu fragen, wo sich die Sieben in der physikalischen Raumzeit befindet. Wir stellen noch ein weiteres Argument ausführlicher vor. Mathematische Gegenstände sind durch wahre Identitätsaussagen mit mathematischen Begriffen verbunden. Nichts Physikalisches ist in dieser Weise mit mathematischen Begriffen verbunden. Also sind die Gegenstände der Mathematik nicht physikalisch.

Betrachten wir einen mathematischen Begriff wie *Die Anzahl der Primzahlen kleiner Siebzehn* oder *Die positive Lösung der quadratischen Gleichung* $x^2 - 49 = 0$. Diese Begriffe beziehen sich auf mathematische Gegenstände. Die Identitätsaussagen *Die Anzahl der Primzahlen kleiner Siebzehn ist Sechs* und *Die positive Lösung der quadratischen Gleichung* $x^2 - 49 = 0$ *ist Sieben* sind wahr. Diese Identitäten zeigen die spezielle Weise, in der mathematische Begriffe mit mathematischen Gegenständen verbunden sind; sie kommt nur dieser Art von Gegenständen zu. Die Behauptung, ein mathematischer Begriff sei mit einem physikalischen Gegenstand identisch, scheint nicht plausibel. *Die Anzahl der Primzahlen kleiner Fünfzehn* oder *Die positive Lösung der quadratischen Gleichung* $x^2 - 49 = 0$ kann offenbar nicht auf einen physikalischen Gegenstand bezogen werden. Wir erhalten daher die schwer zu bestreitende Schlussfolgerung, dass die Gegenstände der Mathematik nicht physikalisch sind.

Es bleibt uns noch aufzuzeigen, dass die Gegenstände der Mathematik nicht Teil der mentalen Realität sind. Wir gehen davon aus, dass die Aussagen der Mathematik objektiv sind. Sehen wir von Irrtümern und Missverständnissen ab, stellen alle Mathematiker durch Beweise denselben Wahrheitswert für eine mathematische Aussage fest. Auf die Erkenntnistheorie der Mathematik gehen wir im nächsten Abschnitt ein. Wie wir im zweiten Kapitel des Buches gesehen haben, ist die mentale Realität wesentlich subjektiv. Hingen die Eigenschaf-

[4] Dieses Argument geht auf den US-amerikanischen Philosophen und Logiker Willard Quine (1908–2000) zurück und wurde vom US-amerikanischen Philosophen Hilary Putnam (1926–2016) ausführlich dargestellt. Siehe hierzu Quine (1963, 1981) und Putnam (1971).

ten mathematischer Gegenstände und damit der Wahrheitswert von Aussagen über diese Gegenstände von mentalen Vorgängen ab, so wären diese Aussagen subjektiv. Da wir davon ausgehen, dass die Aussagen der Mathematik objektiv sind, folgt, dass die Gegenstände der Mathematik nicht Teil der mentalen Realität sein können.

Daneben folgt auch aus der Zeitlichkeit des Mentalen, auf die wir in Abschnitt 3.2 eingegangen sind, eine klare Trennung der mentalen und mathematischen Realität. Die mentale Realität enthält Vorgänge; Aussagen über solche Vorgänge beziehen sich auf zeitlich bestimmte Sachverhalte. Die Aussagen der Mathematik sind dagegen nicht zeitabhängig. Die Aussage *Sieben ist eine Primzahl* bezieht sich nicht auf einen zeitlich fortbestehenden Prozess, sondern auf einen zeitunabhängigen Sachverhalt.

In ihrer Gesamtheit zeigt die hier ausgeführte Argumentation, dass die Gegenstände der Mathematik Abstrakta sind. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob alle Abstrakta Gegenstand mathematischer Forschung sind bzw. prinzipiell sein können. Uns sind keine Abstrakta im Sinne unserer Definition bekannt, für die dies nicht gilt. Andererseits haben wir bedauerlicherweise kein Argument, das ausschließt, dass es solche Gegenstände gibt.

4.3 Die Kontinuumshypothese

Die Kontinuumshypothese in der Mathematik ist eine echte Herausforderung für den platonischen Realismus in der Philosophie der Mathematik, den wir im letzten Abschnitt besprochen haben. Um das Problem zu beschreiben, sind einige mathematische Vorarbeiten unumgänglich.

Einer der Grundbegriffe der zeitgenössischen Mengenlehre ist der Begriff der Kardinalität oder Mächtigkeit. Zwei Mengen haben die gleiche Mächtigkeit, wenn es eine Bijektion, d. h. eine eineindeutige umkehrbare Abbildung, zwischen ihnen gibt. Zum Beispiel haben die Mengen $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{a, b, c\}$ die gleiche Mächtigkeit; wir schreiben hierfür $|A| = |B|$. Auch die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ haben die gleiche

Mächtigkeit: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.[5] Nun betrachten wir das Kontinuum, also die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Diese lassen sich bekanntlich durch unendliche Dezimalentwicklungen darstellen. Georg Cantor (1845–1918) zeigte, dass die Menge der reellen Zahlen nicht die gleiche Kardinalität wie die Menge der natürlichen Zahlen hat.[6] Da die natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen eingebettet sind, ist die Kardinalität der reellen Zahlen damit größer: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Die Kontinuumshypothese besagt nun, dass jede unendliche Teilmenge A der reellen Zahlen entweder die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen oder die Mächtigkeit der reellen Zahlen hat, also $|A| = |\mathbb{N}|$ oder $|A| = |\mathbb{R}|$. Eine Kardinalität zwischen derjenigen der natürlichen Zahlen und derjenigen der reellen Zahlen existiert demnach nicht. Georg Cantor formulierte diese Vermutung 1878. Kurt Gödel (1906–1978) zeigte 1938, dass sich die Kontinuumshypothese unter der Voraussetzung, dass die üblichen Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei sind, nicht mit diesen Axiomen widerlegen lässt.[7] Auf der anderen Seite zeigte Paul Cohen (1934–2007) im Jahre 1963, dass sich die Kontinuumshypothese unter derselben Voraussetzung auch nicht aus diesen Axiomen beweisen lässt.[8] Man gewinnt damit den Eindruck, als könnten wir entscheiden, ob wir Mathematik mit der Kontinuumshypothese oder mit ihrer Negation betreiben wollen.

Wir sehen zwei Möglichkeiten, wie ein platonischer Realist in der Philosophie der Mathematik mit diesem Problem umgehen kann. Die erste Möglichkeit besteht darin, zu behaupten, dass die abstrakte Realität zwei disjunkte mathematische Welten enthält: In der einen Welt gilt die Kontinuumshypothese, in der anderen gilt sie nicht. Dies ist eine kohärente Position in der Philosophie der Mathematik, die uns aber wenig attraktiv erscheint. Der einheitliche Gegenstandsbereich und die Vorstellung eines für alle mathematischen Aussagen einheitlichen Wahrheitswertes gingen dabei verloren. Scheinbar widersprüchliche Aussagen könnten je nachdem wahr sein, auf welche mathematische Welt wir uns beziehen. Konsequenterweise müssten wir sogar die Existenz vieler mathematischer Welten in der abstrakten Realität annehmen.

---

[5] Eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist beispielsweise durch

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -(n-1)/2, & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

gegeben. Sie bildet die Folge 1,2,3,4,5,... auf 0,1, −1,2, −2,... ab.

[6] Siehe hierzu Cantor (1891/92).

[7] Siehe hierzu Gödel (1940).

[8] Paul Cohen bewies, dass auch die Negation der Kontinuumshypothese mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre einschließlich des Auswahlaxioms vereinbar ist, sofern diese Axiome widerspruchsfrei sind. Damit lässt sich die Kontinuumshypothese auch nicht aus diesen Axiomen beweisen. Siehe hierzu Cohen (1963).

Wir könnten zum Beispiel eine mathematische Welt betrachten, in der ausschließlich algorithmisch konstruierbare mathematische Objekte zugelassen sind. Da es nur abzählbar viele Algorithmen gibt, gibt es auch nur abzählbar viele algorithmisch konstruierbare reelle Zahlen. Die überabzählbare Menge der reellen Zahlen der üblichen Mathematik wäre in einer solchen Welt nicht vorhanden. Auch eine finitistische mathematische Theorie, in der nur endliche Mengen zugelassen sind, könnte man als alternative Grundlage mathematischen Denkens betrachten. Eine solche Theorie wäre allerdings keine bloße Variante der üblichen Mengenlehre, sondern würde deren Annahme unendlicher Mengen aufgeben. Eine philosophisch motivierte Zersplitterung des Gegenstandsbereiches mathematischer Forschung erscheint uns unerquicklich.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, zu behaupten, dass wir die abstrakte Realität, insbesondere das mengentheoretische Universum, noch nicht gut genug verstehen, um die Kontinuumshypothese entscheiden zu können. Wir wollen an dieser Stelle noch einmal zum Anfang dieses Buches zurückkehren. Wir hatten dort in provozierender Absicht die These aufgestellt, dass die zeitgenössische Physik die physikalische Raumzeit und damit die gesamte physikalische Realität noch nicht hinreichend versteht, und zu einer Revision der allgemeinen Relativitätstheorie aufgerufen. Die Lage ist hier ähnlich. Eine Revision der mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik sollte die Kontinuumshypothese entscheiden. Vielleicht reicht eine Erweiterung der mathematischen Grundlagen um ein bisher unbekanntes, intuitiv einleuchtendes Axiom hierfür aus. Tatsächlich gibt es Bemühungen, ein solches Axiom zu finden. Aus dem Symmetrieaxiom von Freiling folgt die Negation der Kontinuumshypothese. Allerdings wird dieses Axiom nicht allgemein akzeptiert.[9] In jedem Fall ziehen wir solche Bemühungen, die Kontinuumshypothese zu entscheiden, einer Viele-Welten-Theorie der abstrakten Realität vor.

4.4 Strukturen

Der Strukturbegriff erfreut sich in der zeitgenössischen Philosophie großer Beliebtheit. Strukturalismus findet sich in der Sprachphilosophie, in der Kulturphilosophie, in der Sozialphilosophie, aber auch in der Philosophie der Mathematik.

[9] Das Axiom besagt: Für jede Funktion f, die jeder reellen Zahl x eine höchstens abzählbare Menge $f(x) \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet, gibt es zwei reelle Zahlen x und y, sodass $y \notin f(x)$ und $x \notin f(y)$ gilt.

[10] Betrachten wir ein System aus Gegenständen oder Vorgängen und Relationen zwischen diesen. Eine Struktur ist eine abstrakte Form eines solchen Systems, die von allen Eigenschaften der Gegenstände des Systems abstrahiert, die nicht durch die Relationen des Systems gegeben sind. Eine Struktur ist also durch ihre relationalen Eigenschaften bestimmt und sieht von den intrinsischen Eigenschaften der Gegenstände oder Vorgänge des Systems ab. Ein System ist eine Realisierung einer Struktur, wenn die Gegenstände oder Vorgänge des Systems die relationalen Eigenschaften der Struktur aufweisen.

Nicht alle Strukturen sind Teil der abstrakten Realität. Betrachten wir das Netz der kausalen Relationen eines Systems aus physikalischen Vorgängen, so handelt es sich um eine physikalische Struktur, die Teil der physikalischen Realität ist. Betrachten wir das komplexe Netz der Abhängigkeiten mentaler Vorgänge wie Empfindungen, Gefühle, Vorstellungen und Gedanken innerhalb eines Bewusstseins, so erhalten wir eine mentale Struktur, die Teil der mentalen Realität ist.

In der zeitgenössischen Mathematik werden Strukturen häufig durch Axiomensysteme beschrieben. Das Axiomensystem einer Struktur gibt an, in welchen relationalen Beziehungen die Gegenstände eines mathematischen Systems stehen, das diese Struktur realisiert. Dabei muss ein Axiomensystem nicht notwendig eine Struktur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen, sondern kann auch eine ganze Klasse nicht isomorpher Strukturen beschreiben. Mathematische Strukturen sind offenbar Teil der abstrakten Realität. Für jede mathematische Struktur gibt es viele Möglichkeiten, sie durch unterschiedliche Mengensysteme zu realisieren. Zum Beispiel dienen die Peano-Axiome zur axiomatischen Beschreibung der Struktur der natürlichen Zahlen.

Zwei klassische mengentheoretische Realisierungen dieser Struktur sind die von-Neumann- und die Zermelo-Konstruktion. Bei der von-Neumann-Konstruktion wird die Folge der natürlichen Zahlen rekursiv durch

$$0 = \emptyset, \qquad n + 1 = n \cup \{n\}$$

definiert. Das Mengensystem der natürlichen Zahlen ist dann

$$\mathbb{N}_{\mathrm{vN}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}.$$

Bei der Zermelo-Konstruktion wird dagegen

$$0 = \emptyset, \qquad n + 1 = \{n\}$$

[10] Zur strukturellen Ausrichtung der modernen Mathematik vgl. Bourbaki (1950).

gesetzt. Das entsprechende Mengensystem ist

$$\mathbb{N}_Z = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}.$$

Mit den jeweils geeigneten Nachfolgerrelationen realisieren beide Mengensysteme die Struktur der natürlichen Zahlen.

Allgemein ist ein Mengensystem durch eine Menge und eine Familie von Relationen auf dieser Menge gegeben. Zwei solche Mengensysteme realisieren dieselbe Struktur, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt, also eine bijektive Abbildung, die die jeweiligen Relationen erhält.[11] Nun liegt die Idee nahe, eine Struktur selbst als die Menge aller Mengensysteme zu verstehen, die sie realisieren, und Strukturen so eine mengentheoretische Ontologie zu verleihen. Die Gesamtheit aller Mengensysteme, die eine bestimmte Struktur realisieren, kann allerdings zu groß sein, um eine Menge zu bilden. In diesem Fall handelt es sich um eine echte Klasse. Die Annahme echter Klassen ermöglicht es in bestimmten mengentheoretischen Grundlegungen, solche Gesamtheiten formal zu behandeln, ohne sie als Mengen aufzufassen. Wir lehnen die Annahme der Existenz solcher Klassen als Teil der abstrakten Realität ausdrücklich ab. Unserer Auffassung nach handelt es sich bei echten Klassen um mentale Konstrukte, die wir intuitiv nicht als Gegenstände der abstrakten Realität erkennen können. Wir schlagen daher vor, mathematischen Strukturen als den Gemeinsamkeiten strukturgleicher Mengensysteme eine eigenständige Existenz in der abstrakten Realität zuzubilligen. Die abstrakte Realität enthält somit mathematische Strukturen und Mengensysteme, die diese realisieren.

Im sogenannten *ante rem*-Strukturalismus in der Philosophie der Mathematik wird sogar behauptet, dass Strukturen in der Ontologie der Mathematik grundlegend sind und sich Mengen und Mengensysteme rein strukturell definieren lassen.[12] Strukturen wären damit die Grundbausteine der abstrakten Realität. Wir teilen diese Auffassung nicht.

Im Sinne einer vor-theoretischen naiven Mengenlehre ist eine Menge durch ihre Elemente bestimmt. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Dies ist auch der Grundgedanke des Extensionalitätsaxioms der axiomatischen Mengenlehre. Wir verstehen die Elementbeziehung dabei

[11] Es ist eine recht technische Angelegenheit, dies zu präzisieren. Zwei Systeme $(A, \{R_i \mid i \in I\})$ und $(\tilde{A}, \{\tilde{R}_j \mid j \in J\})$ mit Mengen $A, \tilde{A}$ und Relationen $R_i, \tilde{R}_i$ sind isomorph, wenn es Bijektionen $f : A \to \tilde{A}$ und $g : I \to J$ gibt, sodass: $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i$ genau dann, wenn $(f(a_1), \ldots, f(a_{n_i})) \in \tilde{R}_{g(i)}$

[12] Vergleiche hierzu Shapiro (1997).

nicht als eine bloße äußere Relation zwischen bereits unabhängig voneinander bestehenden Gegenständen. Vielmehr sind die Elemente für die Identität einer Menge konstitutiv. Eine Menge ist also durch ihre Elemente bestimmt, und diese Bestimmung gehört zu ihrem Wesen.

Betrachten wir nun die axiomatische Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel, die eine Grundlage der zeitgenössischen Mathematik bildet. In üblichen Darstellungen wird als eines ihrer Axiome die Existenz einer leeren Menge gefordert, die keine Elemente enthält. Die leere Menge ist damit ein grundlegender Gegenstand der Mengentheorie. Ihre Identität ist dadurch bestimmt, dass sie keinerlei Elemente enthält. Sie ist also nicht durch eine bestimmte Position innerhalb eines Mengensystems oder durch ihre Beziehungen zu anderen Mengen ausgezeichnet, sondern durch das Fehlen jeglicher Elemente. Zwar lässt sich auch diese Eigenschaft formal durch die Elementrelation ausdrücken. Ein Vertreter des Strukturalismus könnte daher einwenden, dass auch die leere Menge durch ihre strukturellen Eigenschaften vollständig bestimmt sei. Wir halten dem jedoch entgegen, dass die Elementbeziehung für die Identität einer Menge konstitutiv ist und nicht lediglich eine strukturelle Beziehung zwischen ansonsten unabhängig bestimmten Gegenständen darstellt.

Die leere Menge ist ebenso wie die oben betrachteten Mengensysteme, die die Struktur der natürlichen Zahlen realisieren, ein Grundbaustein der Mengentheorie und damit der abstrakten Realität. Wir weisen daher die Annahme einer rein strukturellen Ontologie der Mathematik zurück. Die abstrakte Realität beinhaltet sowohl Mengensysteme als auch Strukturen, die nicht wechselseitig aufeinander reduzierbar sind. Wir haben es auch hier mit einer Pluralität von Gegenständen zu tun.