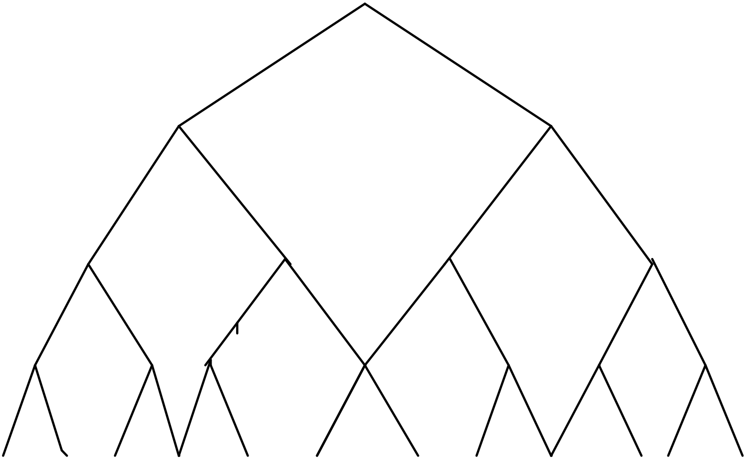
Zufallswege auf unendlichen gewurzelten selbst-ähnlichen Graphen

Dr. Jörg Neunhäuserer

TU Clausthal / TFH Berlin

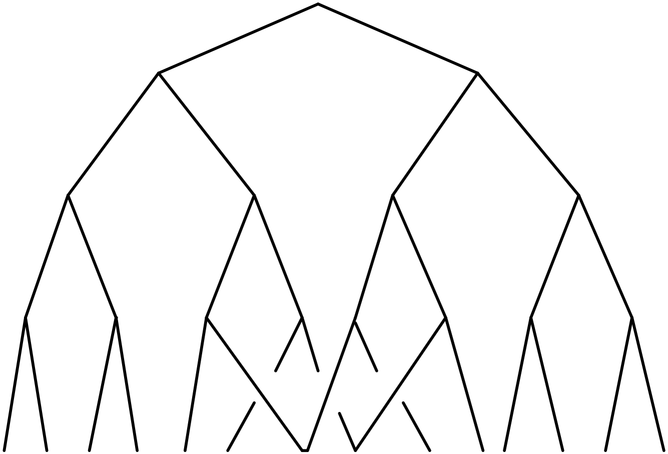
Universität Erlangen-Nürnberg
16. April 2010

Der Fibonacci Graph (Alexander und Zagier 1991)



$$LRR \simeq RLL$$

Ein weiteres Beispiel



LRRR $\simeq$ RLRL

Konstruktion selbst-ähnlicher Graphen

- Betrachte die Menge der endlichen Wörter $\mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ und die Äquivalenzrelation $\simeq$ mit

$$v \simeq u \Rightarrow l(v) = l(u)$$

$$v \simeq u \wedge p \simeq w \Rightarrow vp \simeq uw$$

$$v \simeq u \wedge vp \simeq uw \Rightarrow p \simeq w.$$

- Die Knoten des Graphen sind

$$\mathbf{K} := \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}/_{\simeq} = \{[w] | w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Zwei Knoten $[w]$ and $[v]$ sind durch eine Kante verbunden, wenn für ein Symbol $i \in \mathbf{A}$ gilt

$$vi \in [w] \text{ oder } wi \in [v].$$

Konstruktion selbst-ähnlicher Graphen

- Betrachte die Menge der endlichen Wörter $\mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ und die Äquivalenzrelation $\simeq$ mit

$$v \simeq u \Rightarrow l(v) = l(u)$$
$$v \simeq u \wedge p \simeq w \Rightarrow vp \simeq uw$$
$$v \simeq u \wedge vp \simeq uw \Rightarrow p \simeq w.$$

- Die Knoten des Graphen sind

$$\mathbf{K} := \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}/_{\simeq} = \{[w] | w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Zwei Knoten $[w]$ and $[v]$ sind durch eine Kante verbunden, wenn für ein Symbol $i \in \mathbf{A}$ gilt

$$vi \in [w] \text{ oder } wi \in [v].$$

Konstruktion selbst-ähnlicher Graphen

- Betrachte die Menge der endlichen Wörter $\mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ und die Äquivalenzrelation $\simeq$ mit

$$v \simeq u \Rightarrow l(v) = l(u)$$

$$v \simeq u \wedge p \simeq w \Rightarrow vp \simeq uw$$

$$v \simeq u \wedge vp \simeq uw \Rightarrow p \simeq w.$$

- Die Knoten des Graphen sind

$$\mathbf{K} := \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}/_{\simeq} = \{[w] | w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Zwei Knoten $[w]$ and $[v]$ sind durch eine Kante verbunden, wenn für ein Symbol $i \in \mathbf{A}$ gilt

$$vi \in [w] \text{ oder } wi \in [v].$$

Konstruktion selbst-ähnlicher Graphen

- Betrachte die Menge der endlichen Wörter $\mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ und die Äquivalenzrelation $\simeq$ mit

$$v \simeq u \Rightarrow l(v) = l(u)$$

$$v \simeq u \wedge p \simeq w \Rightarrow vp \simeq uw$$

$$v \simeq u \wedge vp \simeq uw \Rightarrow p \simeq w.$$

- Die Knoten des Graphen sind

$$\mathbf{K} := \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}/_{\simeq} = \{[w] | w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Zwei Knoten $[w]$ and $[v]$ sind durch eine Kante verbunden, wenn für ein Symbol $i \in \mathbf{A}$ gilt

$$vi \in [w] \text{ oder } wi \in [v].$$

Eigenschaften der Konstruktion

- Durch diese Konstruktion haben wir die Selbstähnlickeit

$$\mathbf{K} \cong \mathbf{K}[v] = \{[uw] | u \in [v] \wedge w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Die exponetielle Wachstumsrate $H(\mathbf{K})$ existiert

$$H(\mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{\log \sharp(\mathbf{K}_n)}{n},$$

da die Anzahl der Knoten auf der n-ten Ebene $\sharp(\mathbf{K}_n)$ subadditiv ist.

Eigenschaften der Konstruktion

- Durch diese Konstruktion haben wir die Selbstähnlickeit

$$\mathbf{K} \cong \mathbf{K}[v] = \{[uw] | u \in [v] \wedge w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Die exponetielle Wachstumsrate $H(\mathbf{K})$ existiert

$$H(\mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{\log \sharp(\mathbf{K}_n)}{n},$$

da die Anzahl der Knoten auf der n-ten Ebene $\sharp(\mathbf{K}_n)$ subadditiv ist.

Eigenschaften der Konstruktion

- Durch diese Konstruktion haben wir die Selbstähnlickeit

$$\mathbf{K} \cong \mathbf{K}[v] = \{[uw] | u \in [v] \wedge w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}\}.$$

- Die exponetielle Wachstumsrate $H(\mathbf{K})$ existiert

$$H(\mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{\log \sharp(\mathbf{K}_n)}{n},$$

da die Anzahl der Knoten auf der n-ten Ebene $\sharp(\mathbf{K}_n)$ subadditiv ist.

Gerichtete Zufallswege

- Sei μ ein invariantes W.-Maß auf dem Raum der unendlichen Wörter. $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$
- Einem Wort $w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ entspricht die Zylindermenge

  $$\langle w \rangle := \{(v_i) \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}} | (v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots w_n)\} \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

  Für einen Knoten $[w] \in \mathbf{K}$ ist der Zylinder definiert als

  $$\langle [w] \rangle := \bigcup_{v \simeq w} \langle v \rangle \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

- Die Wahrscheinlichkeit einen Knoten $[w]$ von der Wurzel aus zu erreichen, ist

  $$\mu([w]) = \mu(\langle [w] \rangle) = \sum_{v \simeq w} \mu(\langle v \rangle).$$

Gerichtete Zufallswege

- Sei μ ein invariantes W.-Maß auf dem Raum der unendlichen Wörter. $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$
- Einem Wort $w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ entspricht die Zylindermenge

$$\langle w \rangle := \{(v_i) \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}} | (v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots w_n)\} \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

Für einen Knoten $[w] \in \mathbf{K}$ ist der Zylinder definiert als

$$\langle [w] \rangle := \bigcup_{v \simeq w} \langle v \rangle \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

- Die Wahrscheinlichkeit einen Knoten $[w]$ von der Wurzel aus zu erreichen, ist

$$\mu([w]) = \mu(\langle [w] \rangle) = \sum_{v \simeq w} \mu(\langle v \rangle).$$

Gerichtete Zufallswege

- Sei μ ein invariantes W.-Maß auf dem Raum der unendlichen Wörter. $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$
- Einem Wort $w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ entspricht die Zylindermenge

$$\langle w \rangle := \{(v_i) \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}} | (v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots w_n)\} \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

  Für einen Knoten $[w] \in \mathbf{K}$ ist der Zylinder definiert als

$$\langle [w] \rangle := \bigcup_{v \simeq w} \langle v \rangle \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

- Die Wahrscheinlichkeit einen Knoten $[w]$ von der Wurzel aus zu erreichen, ist

$$\mu([w]) = \mu(\langle [w] \rangle) = \sum_{v \simeq w} \mu(\langle v \rangle).$$

Gerichtete Zufallswege

- Sei μ ein invariantes W.-Maß auf dem Raum der unendlichen Wörter. $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$
- Einem Wort $w \in \mathbf{A}^{(\mathbb{N})}$ entspricht die Zylindermenge

$$\langle w \rangle := \{(v_i) \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}} | (v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots w_n)\} \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

Für einen Knoten $[w] \in \mathbf{K}$ ist der Zylinder definiert als

$$\langle [w] \rangle := \bigcup_{v \simeq w} \langle v \rangle \subseteq \mathbf{A}^{\mathbb{N}}.$$

- Die Wahrscheinlichkeit einen Knoten $[w]$ von der Wurzel aus zu erreichen, ist

$$\mu([w]) = \mu(\langle [w] \rangle) = \sum_{v \simeq w} \mu(\langle v \rangle).$$

Definition der Entropie

- Betrachte die Partition von $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$, die durch Knoten $\mathbf{K}_n$ erzeugt wird

$$\mathfrak{P}_n = \{\langle [w] \rangle | [w] \in \mathbf{K}_n\}.$$

- Die Entropie des Zufallsweges ist

$$h(\mu, \mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{H(\mu, \mathfrak{P}_n)}{n},$$

wobei $H(\mu, \mathfrak{P}_n)$ die Entropie der Partition ist.

- Der Grenzwert existiert auf Grund der Selbst-ähnlichkeit des Graphen und der Invarianz des Maßes.

Definition der Entropie

- Betrachte die Partition von $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$, die durch Knoten $\mathbf{K}_n$ erzeugt wird

$$\mathfrak{P}_n = \{\langle [w] \rangle | [w] \in \mathbf{K}_n\}.$$

- Die Entropie des Zufallsweges ist

$$h(\mu, \mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{H(\mu, \mathfrak{P}_n)}{n},$$

wobei $H(\mu, \mathfrak{P}_n)$ die Entropie der Partition ist.

- Der Grenzwert existiert auf Grund der Selbst-ähnlichkeit des Graphen und der Invarianz des Maßes.

Definition der Entropie

- Betrachte die Partition von $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$, die durch Knoten $\mathbf{K}_n$ erzeugt wird
$$\mathfrak{P}_n = \{\langle[w]\rangle | [w] \in \mathbf{K}_n\}.$$

- Die Entropie des Zufallsweges ist
$$h(\mu, \mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{H(\mu, \mathfrak{P}_n)}{n},$$
wobei $H(\mu, \mathfrak{P}_n)$ die Entropie der Partition ist.

- Der Grenzwert existiert auf Grund der Selbst-ähnlichkeit des Graphen und der Invarianz des Maßes.

Definition der Entropie

- Betrachte die Partition von $\mathbf{A}^{\mathbb{N}}$, die durch Knoten $\mathbf{K}_n$ erzeugt wird
$$\mathfrak{P}_n = \{\langle[w]\rangle | [w] \in \mathbf{K}_n\}.$$
- Die Entropie des Zufallsweges ist
$$h(\mu, \mathbf{K}) := \lim_{n \longmapsto \infty} \frac{H(\mu, \mathfrak{P}_n)}{n},$$
wobei $H(\mu, \mathfrak{P}_n)$ die Entropie der Partition ist.
- Der Grenzwert existiert auf Grund der Selbst-ähnlichkeit des Graphen und der Invarianz des Maßes.

Eigenschaften der Entropie

- Die Partition in Zylindermengen ist feiner als die Partition in Zylindermengen der Knoten, also
$$h(\mu,\mathbf{K}) \leq h(\mu).$$
Gleichheit gilt nur für die Graphen K ohne Äquivalenzen.
- Die Funktion
$$\mu \mapsto h(\mu,\mathbf{K})$$
ist ober halbstetig und affin.
- Da $\sharp(\mathfrak{P}_n) = \sharp(\mathbf{K}_n)$, gilt
$$h(\mu,\mathbf{K}) \leq H(\mathbf{K}).$$

Eigenschaften der Entropie

- Die Partition in Zylindermengen ist feiner als die Partition in Zylindermengen der Knoten, also

$$h(\mu, \mathbf{K}) \leq h(\mu).$$

Gleichheit gilt nur für die Graphen K ohne Äquivalenzen.

- Die Funktion

$$\mu \mapsto h(\mu, \mathbf{K})$$

ist ober halbstetig und affin.

- Da $\sharp(\mathfrak{P}_n) = \sharp(\mathbf{K}_n)$, gilt

$$h(\mu, \mathbf{K}) \leq H(\mathbf{K}).$$

Eigenschaften der Entropie

- Die Partition in Zylindermengen ist feiner als die Partition in Zylindermengen der Knoten, also
$$h(\mu,\mathbf{K}) \le h(\mu).$$
Gleichheit gilt nur für die Graphen K ohne Äquivalenzen.
- Die Funktion
$$\mu \mapsto h(\mu,\mathbf{K})$$
ist ober halbstetig und affin.
- Da $\sharp(\mathfrak{P}_n) = \sharp(\mathbf{K}_n)$, gilt
$$h(\mu,\mathbf{K}) \le H(\mathbf{K}).$$

Eigenschaften der Entropie

- Die Partition in Zylindermengen ist feiner als die Partition in Zylindermengen der Knoten, also

  $$h(\mu, \mathbf{K}) \leq h(\mu).$$

  Gleichheit gilt nur für die Graphen K ohne Äquivalenzen.
- Die Funktion

  $$\mu \mapsto h(\mu, \mathbf{K})$$

  ist ober halbstetig und affin.
- Da $\sharp(\mathfrak{P}_n) = \sharp(\mathbf{K}_n)$, gilt

  $$h(\mu, \mathbf{K}) \leq H(\mathbf{K}).$$

Zwei Hauptresultate zur Entropie

- **Variations Theorem:** Jeder unendliche selbst-ähnliche Graph hat einen Zufallsweg μ mit voller Entropie

$$h(\mu, \mathbf{K}) = H(\mathbf{K}).$$

μ ist im allgemeinen kein Bernoulli oder Markov Maß.

- **Lokales Entropie Theorem:** Für fast alle $w \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$h(\mu, \mathbf{K}) = \lim_{n \longmapsto \infty} -\frac{1}{n} \log \mu([w_1, \ldots, w_n]).$$

Zwei Hauptresultate zur Entropie

- **Variations Theorem:** Jeder unendliche selbst-ähnliche Graph hat einen Zufallsweg μ mit voller Entropie

$$h(\mu, \mathbf{K}) = H(\mathbf{K}).$$

μ ist im allgemeinen kein Bernoulli oder Markov Maß.

- **Lokales Entropie Theorem:** Für fast alle $w \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$h(\mu, \mathbf{K}) = \lim_{n \longmapsto \infty} -\frac{1}{n} \log \mu([w_1, \ldots, w_n]).$$

Zwei Hauptresultate zur Entropie

- **Variations Theorem:** Jeder unendliche selbst-ähnliche Graph hat einen Zufallsweg μ mit voller Entropie

$$h(\mu, \mathbf{K}) = H(\mathbf{K}).$$

μ ist im allgemeinen kein Bernoulli oder Markov Maß.

- **Lokales Entropie Theorem:** Für fast alle $w \in \mathbf{A}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$h(\mu, \mathbf{K}) = \lim_{n \longmapsto \infty} -\frac{1}{n} \log \mu([w_1, \dots, w_n]).$$

Definition von Grenzverteilungen

- Projeziere das W-Maß μ von den Knoten $\mathbf{K_n}$ der n-ten Ebene des Graphen äquidistant auf ein Intervall

$$\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}.$$

- Eine Grenzverteilung $\mu_{\mathbf{K}}$ des Zufallsweges auf dem Graphen $\mathbf{K}$ sei ein Häufungspunkt der Folge μ_n (in der schwach* Topologie auf dem Raum der Borel W-Maße).
- Frage: Existiert der Grenzwert, ist die Grenzverteilung also eindeutig?

Definition von Grenzverteilungen

- Projeziere das W-Maß μ von den Knoten $\mathbf{K_n}$ der n-ten Ebene des Graphen äquidistant auf ein Intervall

$$\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}.$$

- Eine Grenzverteilung $\mu_{\mathbf{K}}$ des Zufallsweges auf dem Graphen **K** sei ein Häufungspunkt der Folge μ_n (in der schwach* Topologie auf dem Raum der Borel W-Maße).
- Frage: Existiert der Grenzwert, ist die Grenzverteilung also eindeutig?

Definition von Grenzverteilungen

- Projeziere das W-Maß μ von den Knoten $\mathbf{K_n}$ der n-ten Ebene des Graphen äquidistant auf ein Intervall

$$\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}.$$

- Eine Grenzverteilung $\mu_{\mathbf{K}}$ des Zufallsweges auf dem Graphen **K** sei ein Häufungspunkt der Folge μ_n (in der schwach* Topologie auf dem Raum der Borel W-Maße).
- Frage: Existiert der Grenzwert, ist die Grenzverteilung also eindeutig?

Definition von Grenzverteilungen

- Projeziere das W-Maß μ von den Knoten $\mathbf{K_n}$ der n-ten Ebene des Graphen äquidistant auf ein Intervall

$$\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}.$$

- Eine Grenzverteilung $\mu_{\mathbf{K}}$ des Zufallsweges auf dem Graphen **K** sei ein Häufungspunkt der Folge μ_n (in der schwach* Topologie auf dem Raum der Borel W-Maße).
- Frage: Existiert der Grenzwert, ist die Grenzverteilung also eindeutig?

Absolut stetige Grenzverteilungen

- **Theorem:** Jeder selbst-ähnliche Graph mit exakter Wachstumsrate, d.h.

$$ce^{nH(\mathbf{K})} \leq \sharp(\mathbf{K}_n) \leq Ce^{nH(\mathbf{K})},$$

  besitzt einen Zufallweg μ, deren Grenzverteilungen absolut stetig sind.
- **Beweisidee:** Wenn $\mu_{\mathbf{K}}$ nicht absolut stetig ist, folgt mit Hilfe der exakten Wachstumsrate

$$h(\mu, \mathbf{K}) < H(\mathbf{K}).$$

  Nutze nun das Variationstheorem.

Absolut stetige Grenzverteilungen

- **Theorem:** Jeder selbst-ähnliche Graph mit exakter Wachstumsrate, d.h.

$$ce^{nH(\mathbf{K})} \leq \sharp(\mathbf{K}_n) \leq Ce^{nH(\mathbf{K})},$$

  besitzt einen Zufallweg μ, deren Grenzverteilungen absolut stetig sind.

- **Beweisidee:** Wenn $\mu_{\mathbf{K}}$ nicht absolut stetig ist, folgt mit Hilfe der exakten Wachstumsrate

$$h(\mu, \mathbf{K}) < H(\mathbf{K}).$$

  Nutze nun das Variationstheorem.

Absolut stetige Grenzverteilungen

- **Theorem:** Jeder selbst-ähnliche Graph mit exakter Wachstumsrate, d.h.

$$ce^{nH(\mathbf{K})} \leq \sharp(\mathbf{K}_n) \leq Ce^{nH(\mathbf{K})},$$

  besitzt einen Zufallweg μ, deren Grenzverteilungen absolut stetig sind.

- **Beweisidee:** Wenn $\mu_{\mathbf{K}}$ nicht absolut stetig ist, folgt mit Hilfe der exakten Wachstumsrate

$$h(\mu, \mathbf{K}) < H(\mathbf{K}).$$

  Nutze nun das Variationstheorem.