Diplomarbeit im Fach Mathematik an der FUB zum Thema:

Die Fat Baker's Transformation - Ein Gegenbeispiel zum Variationsprinzip der Hausdorff Dimension

von Jörg Neunhäuserer

betreut durch Dr. Jörg Schmeling

August 1996

Inhaltsübersicht

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird die Fat Baker's Transformation, eine einfache, zweidimensionale, stückweise lineare Abbildung, die von einem Parameter abhängt und ihr "Lift", eine drei-dimensionale Abbildung, deren Projektion die Fat Baker's Transformation ist, untersucht.

Unsere Ziel ist dabei die Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit des Variationsprinzips der Hausdorff Dimension für den Attraktor der Fat Baker's Transformation bzw. für den Attraktor des "Lift's", d.h. der Frage, ob ein ergodisches Maß auf dem Attraktor existiert, dessen Hausdorff Dimension mit der des Attraktors übereinstimmt.

Unsere Hauptergebnisse sind obere Abschätzungen der Hausdorff Dimension beliebiger ergodischer Maße sowie "feinere" Abschätzungen für ergodische Maße, die zusätzliche Bedingungen (Bilder von Bernoulli Maßen, Produktstruktur) erfüllen. Diese Abschätzungen erlauben es uns zu zeigen, daß das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für die Fat Baker's Transformation nicht erfüllt ist, falls der Paramter als Reziprok einer Pisot-Vijayarghavan Zahl (kurz PV-Zahl) gewählt wird. Für den "Lift" erhalten wir in diesem Fall das Resultat, daß zumindest ergodische Maße, die eine Produktstruktur besitzen, keine volle Hausdorff Dimension haben.

Auf dem Weg zu diesen Resultaten wird eine Reihe von dynamischen und ergodentheoretischen Aspekten der Fat Baker's Transformation und des "Lift's" diskutiert.
Wir bestimmen einen Zusammenhang zur Shift-Dynamik und die Darstellung invarianter und ergodischer Maße mittels diesem. Hieraus ergeben sich Resultate über maßtheoretische Entropie der invarianten Maße. Mit Hilfe der maßtheoretischen Entropie lässt sich dann die unstabile Dimension, und im weiteren auch die Hausdorff Dimension, beliebiger ergodischer Maße abschätzen.
Für eine genauere Abschätzung der stabilen Dimension, und damit der Hausdorff Dimension, ergodischer Maße werden unendlich gefaltete Bernoulli Maße relevant, ihr Produkt mit dem ensprechenden Bernoulli Maß ist nämlich ergodisch in Bezug auf die Fat Baker's Transformation, und sie tauchen in Bezug auf den "Lift" als transversale Maße auf.

Für die Abschätzung der Grösse der Hausdorff Dimension unendlich gefalteter Bernoulli Maße ist das Faktum entscheidend, daß diese Maße (im gleichgewichteten Fall) singulär sind, falls ihr Parameter das Reziprok einer PV-Zahl ist.

In dieser Arbeit wird sich auch das Ergebniss von Alexander und Yorke aus der bekannten Arbeit "Fat Baker's Transformation's" ([AY]) wiederfinden, daß das SRB-Maß der Fat Baker's Transformation ein Produkt aus gleichgewichtetem unendich gefaltetem Bernoulli Maß und Lebesgue Maß ist und seine Rényi Dimension für PV-Zahlen kleiner als zwei wird.

2. Grundbegriffe und grundlegende Sätze

In diesem einführenden Abschnitt werden grundlegende Begriffe der Ergodentheorie, wie ergodische Maße, Entropie und Dimension, definiert. Darüberhinaus werden einige Sätze der Ergodentheorie dargestellt, wobei sich die Auswahl wesentlich an Erfordernissen späterer Abschnitte orientiert. Wir werden insbesondere auf das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension näher eingehen.

2.1. Invariante, ergodische und Sinai-Ruelle-Bowen Maße

X sei ein kompakter metrischer Raum und $B(X)$ die Borel $\sigma-$Algebra auf X. Wir bezeichnen mit $M(X)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(X, B(X))$. Mittels des Rieszeschen Darstellungssatzes lässt sich $M(X)$ mit einer kompakten Teilmenge der Einheitskugel in $C(X)^*$ identifizieren und so mit der *schwach**-Topologie versehen.
$T : X \longmapsto Y$ sei eine Borel-meßbare Abbildung des metrischen Raumes X in den metrischen Raum Y $(T^{-1}B \in B(X) \ \ \forall B \in B(Y))$.
$T^* : M(X) \longmapsto M(Y)$ sei die, durch T induzierte, Abbildung der Räume der Maße, d.h. für ein μ aus $M(X)$ definieren wir $T^*\mu$ durch $T^*\mu(B) = \mu(T^{-1}B)$ für alle $B \in B(Y)$. Es gilt folgender maßtheoretischer Satz:

Satz 2.1.1.

Ist T surjektiv und stetig, so ist T^* surjektiv, stetig und affin.

Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [DGS,3.2.].

T sei nun eine Borel-meßbare Abbildung des metrischen Raumes X in sich und $\mu \in M(X)$.

Definition 2.1.2.

μ heißt T-invariant, falls $T^*\mu = \mu$.
μ heißt T-ergodisch, falls μ T-invariant ist und zusätzlich
$(T^{-1}B = B \Rightarrow \mu(B) \in \{0, 1\}) \ \ \forall B \in B(X)$ gilt.

Wir führen folgende Notation ein:
$M_{inv}(X,T) := \{\mu \in M(X) |\ \mu \text{ ist } T-\text{invariant}\}$
$M_{erg}(X,T) := \{\mu \in M(X) |\ \mu \text{ ist } T-\text{ergodisch}\}$
und merken an, daß $M_{inv}(X,T)$ eine kompakte, konvexe und nicht leere Teilmenge von $M(X)$ ist und $M_{erg}(X,T)$ gerade aus den Extremalpunkten von von $M_{inv}(X,T)$ besteht (vgl. [DGS,3/5]).

Die Ergodentheorie analysiert invariante und ergodische Maße und studiert das Verhalten dynamischer Systeme mittels dieser. Viele Resultate über die Dynamik lassen sich fast überall in Bezug auf solche Maße gewinnen. Ein typisches Beispiel ist der Birkhoffsche Ergodensatz.

Satz 2.1.3. [Birkhoff]

$x \in X$ heißt generisch bezüglich (X,T,μ) falls

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \phi(T^n x) = \int_X \phi d\mu \quad \forall \phi \in L^1(X, B(X), \mu) \quad (*)$$

$G_\mu(X,T)$ sei die Menge der in Bezug auf (X,T,μ) generischen Punkte.
Es gilt:

$$\mu \in M_{erg}(X,T) \Leftrightarrow \mu(G_\mu(X,T)) = 1$$

Ein Beweis und Anwendungen des Birkhoffschen Ergodensatzes findet sich in [PO,1.5./1.6.]. Angemerkt sei noch, daß der Grenzwert in (*) auch in Bezug auf ein invariantes Maß fast überall existiert und in Abhängikeit von x eine L^1-Funktion bildet.
Setzt man in (*) für ϕ die charakteristische Funktion einer Menge B aus $B(X)$ ein, so sieht man, daß die mittlere Häufigkeit Iterierter eines generischen Punktes in B gegen das Maß von B konvergiert. Das langfristige Verhalten der Iterierten generischer Punkte wird also durch das Maß beschrieben.

Wir betrachten nun speziell kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten X mit normiertem Lebesgue Maß ℓ und führen eine weitere maßtheoretische Notation ein.

Definition 2.1.4.

Ein Maß μ aus $M(X)$ heißt absolut stetig (in Bezug auf ℓ), falls für alle $B \in B(X)$ $(\ell(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0)$ und rein singulär (in Bezug auf ℓ), falls ein $B \in B(X)$ existiert, so daß $\mu(B) = 1$ und $\ell(B) = 0$.

Invariante und ergodische Maße können auf Mengen von Lebesgue Maß null konzentriert und somit singulär sein. Es kann sich etwa um das Diracmaß eines Fixpunktes bzw. periodischen Orbits handeln, oder daß Maß kann auf eine "fractale" Menge konzentriert sein.

Besondere Bedeutung kommt Sinai-Ruelle-Bowen Maßen zu, deren generische Punkte positives Lebesgue Maß haben.

Definition 2.1.5.

$\mu \in M_{inv}(X,T)$ heißt Sinai-Ruelle-Bowen Maß (kurz SRB-Maß) für (X,T,μ), falls $\ell(G_\mu(X,T)) > 0$.

Sind sogar ℓ-fast alle Punkte μ-generisch, so ist μ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, wie man mit dem Rieszschen Darstellungsatz sieht.
SRB-Maße charakterisieren die globale asymptotische Dynamik eines Systems, da sich Iterierte einer "großen" Menge von Anfangspunkten entsprechend dem SRB-Maß konzentrieren.
1972 zeigte Sinai die Existenz eines SRB-Maßes für Anosov-Systeme (vgl. [SI]) und 1975 bewiesen Bowen und Ruelle die Existenz für Attraktoren von Axiom A Flüssen (vgl. [BR]). In [RU] findet sich das Resultat für Axiom A Diffeomorphismen.
Im allgemeinen muß für dynamische Systeme kein SRB-Maß existieren.

2.2. Entropie

Definition 2.2.1.: Maßtheoretische Entropie

Sei X wieder ein metrischer Raum und T eine Borel-meßbare Abbildung von X in sich sowie $\mu \in M_{inv}(X,T)$.
Wir definieren die Information einer endlichen meßbaren Partition $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_M\}$ von X in Bezug auf μ durch:

$$H_\mu(\Gamma) := -\sum_{i=1}^{M} \mu(B_i) \log \mu(B_i)$$

wobei man $x \log x$ für $x = 0$ als null definiert.
$\bigvee_{i=0}^{N} T^{-i}\Gamma$ sei die sub-σ-Algebra von X, die aus allen Schnitten der Form $\bigcap_{i=0}^{N} B_{j_i}$, $j_i \in \{1, \ldots, M\}$, besteht. Weiter definieren wir:

$$h_\mu(T,\Gamma) := \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{N-1} T^{-i}\Gamma) \quad \text{und}$$

$$h_\mu(T) := sup\{h_\mu(T,\Gamma) \mid \Gamma \text{ eine endliche sub-}\sigma\text{-Algebra von } X\}$$

$h_\mu(T)$ wird als maßtheoretische Entropie von T bezüglich μ bezeichnet und kann als mittlere Information bezüglich μ, die durch die Iteration von T produziert wird, interpretiert werden.

Diese Definition ist [WA,4.4./4.5.] entnommen. Der Beweis der Existenz des Grenzwerts und die Eigenschaften von $h_\mu(T,\Gamma)$ bzw. $h_\mu(T)$ können dort nachgelesen werden.

Lemma 2.2.2.

(X,T), $(\bar{X},\bar{T})$ seien zwei metrische Räume mit Borel-meßbaren Abbildungen und $\mu \in M_{inv}(X,T)$ sowie $\bar{\mu} \in M_{inv}(\bar{X},\bar{T})$.
$\psi : X \longrightarrow \bar{X}$ sei surjektiv und meßbar (in Bezug auf $B(X)$, $B(\bar{X})$).
Falls $\bar{T} \circ \psi(x) = \psi \circ T(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ und $\psi^*\mu = \bar{\mu}$ erfüllt ist, gilt:

$$h_{\bar{\mu}}(\bar{T}) \leq h_\mu(T)$$

Für einen Beweis des Lemmas verweisen wir wieder auf [WA,4.5.].
Aus 2.2.2. folgt sofort, daß zwei maßtheoretisch konjugierte Systeme (ψ fast überall bijektiv mit meßbarer Umkehrung) die gleiche maßtheoretische Entropie haben.

Definition 2.2.3.: Topologische Entropie

Die Definition, die hier gegeben wird, entspricht Bowens Definition der Topologischen Entropie nicht notwendig kompakter Mengen in [BO].
Wir setzen hier X als eine kompakte Teilmenge des $\mathbf{R^p}$ und T von X in sich als stückweise stetig voraus.
Sei $\Upsilon = (O_1, O_2, \ldots O_k)$ eine offene Überdeckung von X. Für ein Teilmenge U von X setze:

$$n_\Upsilon(U) = \{ \begin{array}{cc} 0 & \text{falls } \; U \nsubseteq O_i \;\; i = 1 \ldots k \\ max\{l | \forall i \in \{1, \ldots, l-1\} \exists j \in \{1, \ldots, k\} : T^i(U) \subseteq O_{k_j}\} & \text{sonst} \end{array}$$

Sei $\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots\}$ eine Überdeckung von $G \subseteq X$. Wir definieren:

$$D_\Upsilon(\Gamma, \lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda n_\Upsilon(G_i))$$

$$m_{\Upsilon,\lambda}(G) := \lim_{\epsilon \longrightarrow \infty} inf\{D_\Upsilon(\Gamma, \lambda) \mid \Gamma \text{ Überdckg. von G}, \; \exp(-\lambda n_\Upsilon(G_i)) < \epsilon \;\; \forall i\}$$

$h_\Upsilon(T, G)$ sei die eindeutig bestimmte Zahl $\bar{\lambda} \in \mathbf{R_0^+}$ für die gilt:

$$m_{\Upsilon,\lambda}(G) = 0 \;\; f\ddot{u}r \;\; \lambda > \bar{\lambda}$$
$$m_{\Upsilon,\lambda}(G) = \infty \;\; f\ddot{u}r \;\; \lambda < \bar{\lambda}$$

$$h(T, G) := sup\{h_\Upsilon(T, G) \mid \Upsilon \text{ eine endliche offene Überdckg. von } X\}$$

$h(T, G)$ wird als topologische Entropie der Menge G unter T bezeichnet. Die Definition von $h_\Upsilon(T, G)$ ist analog zur Definition der Hausdorff Dimension im nächsten Abschnitt, wobei der Durchmesser von Überdeckungselementen hier ersetzt wird durch die Zeit die, die Bilder der Überdeckungselemente feiner als eine gegebene Überdeckung bleiben.

Folgender Satz, der eine Zusammenstellung der Resultate von Bowen aus [BO] darstellt, beschreibt den Zusammenhang zwischen maßtheoretischer und topologischer Entropie.

Satz 2.2.4.[Bowen]

(1) $\mu \in M_{inv}(X, T)$ und $\mu(G) = 1 \;\Rightarrow h(T, G) \geq h_\mu(T)$
(2) $h(T, X) = sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in M_{inv}(X, T)\}$
(3) $\mu \in M_{erg}(X, T) \Rightarrow h(T, G_\mu(X, T)) = h_\mu(T)$

Es ist darauf hinzuweisen, daß Bowen in [BO] X als einen kompakten metrischen Raum und T als stetig voraussetzt. Die Beweise lassen sich jedoch auf die hier vorausgesetzte Situation einer stückweise stetigen Abbildung einer kompakten Teilmenge des $\mathbf{R^p}$ übertragen.

2.3. Dimension

X sei wieder ein kompakter metrischer Raum. Die hier zu definierenden "fractalen" Dimensionsbegriffe dienen dazu, Teilmengen von X (nach ihrer "Größe") und Maße aus $M(X)$ (entsprechent der Dimension der Mengen auf die sie konzentriert sind) quantitativ zu unterscheiden. Insbesondere differenzieren die Dimensions-Größen Mengen von Lebesgue Maß null bzw. singuläre Maße.

Definition 2.3.1.: Hausdorff Dimension

$$m_\lambda(G) := \lim_{\epsilon \longrightarrow \infty} inf\{\sum_{U \in \Gamma} (diamU)^\lambda \mid \Gamma \text{ eine Überdeckung von } G,\ diam\Gamma \leq \epsilon\}$$

für $G \subseteq X$. $m_\lambda(G)$ wird als λ-dimensionales Hausdorff Maß von G bezeichnet.

Die Hausdorff Dimension von G, $dim_H G$, sei die eindeutig bestimmte Zahl $\bar{\lambda} \in \mathbf{R_0^+}$, für die gilt:

$$m_\lambda(G) = 0 \quad f\ddot{u}r \quad \lambda > \bar{\lambda}$$
$$m_\lambda(G) = \infty \quad f\ddot{u}r \quad \lambda < \bar{\lambda}$$

Die Hausdorff Dimension eines Maßes μ aus $M(X)$ definiert man folgendermaßen:

$$dim_H \mu := inf\{dim_H G \mid G \subseteq X \text{ mit } \mu(G) = 1\}$$

Definition 2.3.2.: Box-Counting Dimension (Kapazität)

$N_\epsilon(G)$ sei die kleinste Anzahl von $\epsilon-$Kugeln, die gebraucht werden, um G zu überdecken.

$$\overline{dim}_B G := \overline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} - \frac{\log N_\epsilon(G)}{\log \epsilon} \qquad \underline{dim}_B G := \underline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} - \frac{\log N_\epsilon(G)}{\log \epsilon}$$

ist die obere bzw. untere Box-Counting Dimension von G. Falls der Grenzwert existiert, so spricht man von der Box-Counting Dimension oder Kapazität, $dim_B G$, der Menge G. Für Maße μ aus $M(X)$ setzt man:

$$\overline{\underline{dim}}_B \mu = \lim_{\rho \longrightarrow 0} inf\{\overline{\underline{dim}}_B G \mid \mu(G) > 1 - \rho\}$$

Falls $\overline{dim}_B \mu = \underline{dim}_B \mu$ gilt, ist der Wert die Box-Counting Dimension, $dim_B \mu$, des Maßes.

Definition 2.3.3.: Rényi Dimension

Zu $\mu \in M(X)$ und einer endlichen meßbaren Partition Γ von X definieren wir $H_\mu(\Gamma)$ wie in 2.2. und setzen darüber hinaus:

$$h_\mu(\epsilon) = inf\{H_\mu(\Gamma) \mid \Gamma \text{ endliche meßbare Partition mit } diam(\Gamma) \leq \epsilon\}$$

$$\overline{dim}_R \mu := \overline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} - \frac{h_\mu(\epsilon)}{\log \epsilon} \qquad \underline{dim}_R \mu := \underline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} - \frac{h_\mu(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

ist die obere bzw. untere Rényi Dimension (manchmal auch Informationsdimension genannt) des Maßes μ. Falls $\overline{dim}_R \mu = \underline{dim}_R \mu$ gilt, wird der Wert als Rényi Dimension, $dim_R \mu$, bezeichnet.

Der Wert der drei definierten Dimensionen kann sich im allgemeinen unterscheiden. Es gelten jedoch die im folgendem Lemma zusammengestellten Ungleichungen.

Lemma 2.3.4.

(1) $dim_H G \leq \underline{dim}_B G \quad \forall G \subseteq X$
(2) $dim_H \mu \leq \underline{dim}_B \mu \quad \forall \mu \in M(X)$
(3) $dim_H \mu \leq \overline{dim}_R \mu \quad \forall \mu \in M(X)$

Zu (1) vgl. [FA,3.17], zu (2) [YO,4.1.] und zu (3) [YO,4.3.].

Wir fügen an dieser Stelle noch ein Lemma über die Hausdorff Dimension von Projektionen und Podukten der Teilmengen des $\mathbf{R^n}$ an.

Lemma 2.3.5.

(1) Sei pr die orthogonal Projektion auf einen Unterraum des $\mathbf{R^n}$. Es gilt:
$dim_H(pr(U)) \leq dim_H U$ und $\overline{dim}_B(pr(U)) \leq \overline{dim}_B U \quad \forall U \subseteq \mathbf{R^n}$
(2) Falls $dim_H U = \overline{dim}_B U$ für $U \subseteq \mathbf{R^n}$ erfüllt ist, gilt:
$dim_H(U \times V) = dim_H U + dim_H V \quad \forall V \subseteq \mathbf{R^m}$
(3) $dim_B(U \times [a,b]) = dim_B U + 1 \; \forall U \in \mathbf{R^n}$

Zu (1) vgl. [FA,6.1.] und zu (2) [FA,7.4.]. Nach [FA,3.1.] kann für $U \subseteq \mathbf{R}^n$ $N_\epsilon(U)$ in der Definition der Box-Counting Dimension ersetzt werden durch die Anzahl achsenparalleler, gerade berührender, n-dimensionaler Würfel die U schneiden. Damit erhält man (3).

Falls $U \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene n-dimensionale Kugel enthält, so erhält man:
$dim_H U = dim_B U = n$
Das wohl bekannteste Beispiel einer Menge mit nicht ganzzahliger Dimension ist die Cantormenge C_β für $\beta \in (0, 0.5)$, die wir hier auf dem Intervall $[-1, 1]$ definieren:

$$C_\beta := \{x \mid x = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(1-\beta)\beta^i \;,\; s_i \in \{-1, 1\}\}$$

Nach [FA,4.5.] gilt:

$$dim_H C_\beta = dim_B C_\beta = -\log 2 / \log \beta$$

Sei X nun eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir stellen hier einen lokalen Zugang zur Dimension eines μ aus $M(X)$ vor.

Definition 2.3.6.: Lokale Dimension

$$\overline{d(x,\mu)} = \overline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log(\mu(B_\epsilon(x)))}{\log \epsilon} \qquad \underline{d(x,\mu)} = \underline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log(\mu(B_\epsilon(x)))}{\log \epsilon}$$

ist die obere bzw. untere lokale Dimension des Maßes μ aus $M(X)$ im Punkte $x \in X$. Falls der Grenzwert existiert, spricht man von der lokalen Dimension $d(x, \mu)$.

Folgender Satz, der als Frostman's Lemma bekannt ist, beschreibt den Zusammhang zwischen lokaler und Hausdorff Dimension des Maßes μ.

Satz 2.3.7.

(1) $\underline{d(x,\mu)} \leq c$ für μ-fast alle $x \in X \quad \Rightarrow \quad dim_H\mu \leq c$
(2) $\underline{d(x,\mu)} \geq c$ für μ-fast alle $x \in X \quad \Rightarrow \quad dim_H\mu \geq c$

In der Literatur findet sich Frostmans's Lemma in verschiedenen Versionen, die hier angegebene Variante ist [PU,1] entnommen.
Insbesondere ergibt sich aus 2.3.7, daß, falls die untere lokale Dimension fast überall konstant ist, folgt, daß die Hausdorff Dimension gleich der Konstanten ist. Young beweist in [YO,4.3.] eine Analogie zu 2.3.7.(2) für die Rénje Dimension:

Satz 2.3.8.[Young]

$\underline{d(x,\mu)} \geq c$ für μ-fast alle $x \in X \quad \Rightarrow \quad \underline{dim}_R\mu \geq c$

Insgesammt erhält Young in [YO,4.4.] folgendes Theorem:

Satz 2.3.9.[Young]

$\underline{d(x,\mu)} = \overline{d(x,\mu)} = c$ für μ-fast alle $x \in X$
$\Rightarrow dim_H\mu = dim_B\mu = dim_R\mu =: dim\mu$

Nach [AY,S.15/16] sind die Vorausetzungen von 2.3.9. für absolut stetige Maße auf kompakten Gebieten im $\mathbf{R^p}$ erfüllt, wobei die lokale Dimension gerade p ist. Wir erhalten also:

Satz 2.3.10.

Sei K ein kompaktes Gebiet im $\mathbf{R^p}$.
Ist $\mu \in M(K)$ absolut stetig so gilt $dim\mu = p$.

2.4. Das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension

Die Darstellung hier ist angelehnt an die Arbeit von Gatzouras und Peres [GP] zum vorliegenden Thema.
X sei ein kompakter metrischer Raum, T eine Borel-meßbare von X in sich und K eine kompakte T-invariante Teilmenge von X (d.h. $T(K) \subseteq K$).

Definition 2.4.1.

Folgende Aussage wird als Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für (X,T,K) bezeichnet:
$dim_H K = max\{dim_H \mu \mid \mu \in M_{erg}(X,T) \text{ mit } \mu(K) = 1\}$.
Ein Maß μ, für das das Maximum angenommen wird, heißt ergodisches Maß voller Hausdorff Dimension auf K.

Zu dieser Definition ist anzumerken, daß für die Gültigkeit des Variationsprinzips die Existenz des Maximums verlangt wird. Falls das Variationsprinzip in dieser Form nicht erfüllt ist, stellt sich also immer noch die Frage, ob sich $dim_H K$ wenigstens durch die Dimension ergodischer Maße auf K approximieren lässt.
Das Variationsprinzip ist von Interesse, da ein enger quantitativer Zusammenhang zwischen einem geometrischen Aspekt (invarianten Mengen und ihrer Dimension) und einem maßtheoretischen Aspekt (ergodischen Maßen und ihrer Dimension) von dynamischen Systemen behauptet wird. Die Frage, unter welchen Bedingungen das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für (X,T,K) Gültigkeit besitzt, ist jedoch bis heute weitgehend offen. Nur in einigen Spezialfällen wurden Resultate erzielt, die hier beschrieben werden sollen.

Satz 2.4.2.

Sei X eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $T \in C^1(X)$ konform (d.h. $D_xT = |D_xT|\Im$ für eine feste Isometrie $\Im$ und $|D_xT|$ ein von x abhängiges Skalar).
Falls T auf der kompakten T-invarianten Teilmenge K von X expandierend ist, gilt das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für (X,T,K).

Der Beweis kann mit Hilfe des Variationsprinzips für den topologischen Druck geführt werden. Man setzt $\phi(x) = -\log|D_xT|$ und wählt λ so, daß der topologische Druck $P(\lambda\phi, T_{|K})$ Null wird. Aus der Definition des topologischen Drucks lässt sich ableiten, daß $dim_H K \leq \lambda$. Aus dem Variationsprinzip für den topologischen Druck erhält man die Existenz eines $\mu \in M_{erg}(K,T)$ mit $\lambda = h_\mu(T)/\int \log|D_xT|d\mu$. Für konform expandierendes T gilt aber die Formel $dim_H\mu = h_\mu(T)/\int \log|D_xT|d\mu$, so daß $\lambda = dim_H\mu$. (vgl. [GP,2])

Zum Beispiel folgt aus 2.4.2., daß alle kompakten Teilmengen von S^1, die invariant unter der Rotation bx mod 1 mit $b > 1$ sind, ergodische Maße mit voller Hausdorff Dimension tragen.
Für den p-dimensionalen Torus liegt auch ein Resultat für nicht konforme Abbildungen vor:

Satz 2.4.3.[Kenyon und Peres]

Sei T die durch die Matrix $diag\{m_1, \ldots, m_p\}$ mit $m_i \in \mathbf{N}$ induzierte Abbildung des p dimensionalen Torus, dann ist das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für alle kompakten T-invarianten Teilmengen des Torus erfüllt.

Dies ist ein Resultat aus [KP], daß eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses darstellt, das von McMullen (vgl. [MC]) und Bedford (vgl. [BE]) unabhängig voneinander erzielt wurde. McMullen und Bedford betrachten kompakte selbst-affine Mengen (sogenannte "McMullen-Bedfort Carpets") des folgenden Typs:

$$K := \{R((s_k)) | (s_k) \in D^{\mathbf{N_0}}\} \quad \text{wobei} \quad R((s_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} diag\{n^{-1}, m^{-1}\} s_k$$

$$\text{und} \quad D \subseteq \{1, \ldots, n-1\} \times \{1, \ldots, m-1\}$$

Nachstehendes Bild veranschaulicht die rekursive Konstruktion von K für $D = \{(0,0), (1,1), (0,2)\}$.

K, aufgefasst als Teilmenge des zweidimensionalen Torus, ist invariant unter der durch $diag\{n, m\}$ induzierten Abbildung T. Nach McMullen und Bedford existiert ein T-ergodisches Maß voller Dimension auf K. Man konstruiert dieses Maß, indem man T-ergodische Maße als Bilder von Shift-ergodischen Maßes auf $D^{\mathbf{N}}$ unter R^* darstellt und ihre Dimension mit Hilfe der Formel von Ledrappier und Young maximiert. Das Maximum wird für das Bild eines Bernoulli Maßes angenommen, und man erhält eine explizite Formel für die

Hausdorff Dimension von K (vgl. [KP,3]). Kenjon und Peres verallgemeinern dies, indem sie die Existenz eines ergodischen Maßes voller Hausdorff Dimension für entsprechend definierte höher dimensionale "McMullen-Bedford Carpets" zeigen und beliebige kompakte T-invariante Mengen mittels T^N-invarianter "Carpets" approximieren (vgl. [KP,4]).

Gatzouras und Lalley verallgemeinern in [GL] das Resultat von McMullen und Bedford in eine andere Richtung. Sie betrachten selbst-affine "Carpets" K folgenden Typs:
Es seien Zahlen $0 < a_{ij} < b_i < 1$ und $0 < c_{ij}, d_i < 1$ für $j = 1 \dots n_i$ und $i = 1 \dots m$ so gewählt, daß die Quader $Q_{ij} := (c_{ij}, c_{ij} + a_{ij}) \times (d_i, d_i + b_i)$ paarweise disjunkte Teilmengen von $(0,1)^2$ sind. Die Q_{ij} sind in Reihen angeordnet und haben jeweils grössere Höhe als Breite.
T_{ij} sei für $(i,j) \in D := \{(i,j) | j = 1 \dots n_i \text{ und } i = 1 \dots m\}$ die affine Kontraktion die $(0,1)^2$ auf Q_{ij} abbildet. Nach dem Satz von Hutchinson aus [HU] existiert eine eindeutig bestimmte kompakte Menge K, die

$$K = \bigcup_{(i,j) \in D} T_{ij}(K)$$

erfüllt.

Satz 2.4.4.[Gatzouras und Lalley]

Seien D, Q_{ij}, T_{ij} und K wie oben definiert und T eine beliebige (meßbare) Abbildung mit $T_{|Q_{ij}} = (T_{ij_{|Q_{ij}}})^{-1}\ \forall (i,j) \in D$, dann existiert ein T-ergodisches Maß voller Hausdorff Dimension auf K. Das Maß lässt sich als Bild eines Bernoulli Maßes auf $D^{\mathbf{N}}$ darstellen.

Zum Abschluß sei noch ein Resultat, das in [GP] enthalten ist, erwähnt. Gatzouras und Peres betachten Produkte von konformen Abbildungen und invariante Mengen K, auf denen diese expandierend sind. Erfüllt der Subshift, der K korrospondiert, eine Spezifikationsbedingung, so erhalten Gatzouras und Peres eine Folge von ergodischen Maßen, deren Hausdorff Dimension die Hausdorff Dimension von K approximiert.

3. Die Fat Baker's Transformation

In diesem Abschnitt wird die Fat Baker's Transformation eingeführt, die wesentliches Untersuchungsobjekt dieser Arbeit ist. Es wird ein Zusammenhang zur Dynamik eines Vollshifts auf zwei Symbolen bestimmt, der insbesondere erlaubt, invariante und ergodische Maße als Bilder von Shift-invarianten bzw. ergodischen Maßen darzustellen. Wir zeigen, das die maßtheoretische Entropie der Bilder von Bernoulli Maßen gleich der Entropie der entsprechenden Bernoulli Maße ist und daß, das Bild des gleichgewichteten Bernoulli Maßes das eindeutig bestimmte invariante Maß für die Fat Baker's Transformation ist, daß die maßtheoretische Entropie mit $\log 2$ maximiert. Darüber hinaus wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß sich die unstabile Dimension (d.h. die Hausdorff Dimension von bedingten Maßen auf einer unstabilen Partition) beliebiger ergodicher Maße mittels der maßtheoretischen Entropie abschätzen lässt.

3.1. Die Baker's Transformation und ihr Attraktor

Unter einer Baker's Transformation ist folgende Abbildung zu verstehen:

$$f_\beta : \qquad \mathbf{R} \times I \longmapsto \mathbf{R} \times I$$

$$f_\beta(x,y) = \{ \begin{array}{ll} (\beta x + (1-\beta), 2y-1) & \textit{für} \quad y \geq 0 \\ (\beta x - (1-\beta), 2y+1) & \textit{für} \quad y < 0 \end{array}$$

$$\text{wobei} \quad \beta \in (0,1) \quad \text{und} \quad I := [-1,1]$$

Für $\beta < 0.5$ spricht man von einer *Skinny Baker's Transformation*, für $\beta = 0.5$ handelt es sich um die *Klassische Baker's Transformation*, und für $\beta > 0.5$ bezeichnet man die Abbildung als *Fat Baker's Transformation.* Diese Terminologie geht auf Alexander und Yorke's Arbeit [AY] zurück und soll hier übernommen werden.

Offensichtlich ist f_β stückweise linear mit der x-Achse als Singularität
Folgendes Lemma zeigt, daß das Qudrat $Q := I \times I$ (vorwärts) invariant unter f_β ist und eine global anziehende Menge darstellt.

Lemma 3.1.1.

(1) $f_\beta(Q) \subseteq Q$
(2) $\lim_{n\to\infty} d(Q, f_\beta^n(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R} \times I$

Beweis:

(1) $x \in I \Rightarrow \beta x + (1-\beta) \in [1-2\beta, 1] \subseteq I$ und $\beta x + (1-\beta) \in [-1, -1+2\beta] \subseteq I$
Damit folgt die Behauptung.

(2) Sei $(x,y) \in \mathbf{R} \times I$. Wir zeigen induktiv, daß:

$$\beta^n x - \sum_{i=0}^{n-1}(1-\beta)\beta^i \le pr_X f_\beta^n(x,y) \le \beta^n x + \sum_{i=0}^{n-1}(1-\beta)\beta^i$$

wobei pr_X die Projektion auf die x-Achse bezeichnet.
Anfang $(n=1)$: $\beta x - (1-\beta) \le pr_X f_\beta(x,y) \le \beta x + (1-\beta)$ gilt.
Schritt $(n \to n+1)$:

$$\beta^{n+1} x - \sum_{i=0}^{n}(1-\beta)\beta^i \le^{I.A.} \beta pr_X f_\beta^n(x,y) - (1-\beta) \le pr_X f_\beta^{n+1}(x,y)$$

$$pr_X f_\beta^{n+1}(x,y) \le \beta pr_X \ f_\beta^n(x,y) + (1-\beta) \le^{I.A.} \beta^{n+1} x + \sum_{i=0}^{n}(1-\beta)\beta^i$$

Mit der geometrischen Reihe folgt $lim_{n\to\infty} d(pr_X f_\beta^n(x,y), I) = 0$ und damit die Behauptung.

□

Im weiteren wird die Einschränkung von f_β auf Q betrachtet, die auch als Baker's Transformation und mit dem Symbol f_β bezeichnet wird.
Geometrisch betrachtet zerteilt f_β das Qudrat Q längs der Singularität $S := I \times \{0\}$. Beide Hälften werden vertikal (linear) mit Faktor zwei auf die volle Höhe von Q expandiert und horizontal mit Faktor β (linear) kontrahiert, wobei das Bild der oberen Hälfte Q_1 an den rechten Rand und das Bild der unteren Hälfte Q_2 an den linken Rand von Q verschoben wird.
Im Fall $\beta < 0.5$ besteht $f_\beta(Q)$ aus zwei disjunkten, vertikalen Streifen $f_\beta(Q_1)$ und $f_\beta(Q_2)$ der Breite 2β am rechten bzw. linken Rand von Q. f_β ist in diesem

Fall auf Q injektiv.

Induktiv folgt, daß $f_\beta^n(Q)$ aus 2^n vertikalen Streifen der Breite $2\beta^n$ besteht, die sich jeweils am rechten und linken Rand der $2\beta^{n-1}$ Streifen, aus denen $f_\beta^{n-1}(Q)$ besteht, befinden.
Im Fall $\beta \geq 0.5$ überschneiden sich die Streifen $f_\beta(Q_1)$ und $f_\beta(Q_2)$ in der Menge $[1-2\beta, -1+2\beta] \times I$ (bzw. im Grenzfall $\beta = 1/2$ in der Menge $\{0\} \times I$). f_β ist somit in diesem Fall auf Q nicht injektiv, jedoch (bis auf die Teilmenge $[-1, 1-2\beta) \times \{1\}$ des Randes von Q) surjektiv.

Wir betrachten nun den Attraktor Λ_β der Baker's Transformation:

$$\Lambda_\beta := \overline{\bigcap_{n \geq 0} f_\beta^n(Q)}$$

Satz 3.1.2.

(1) Für $\beta < 0.5$ gilt $\Lambda_\beta = C_\beta \times I$ und $dim_{H/B} \Lambda_\beta = 1 - \frac{\log 2}{\log \beta}$.
(2) Für $\beta \geq 0.5$ gilt $\Lambda_\beta = Q$ und $dim_{H/B} \Lambda_\beta = 2$.

Beweis:

(1) Aus obiger geometrischer Darstellungn der Struktur von $f_\beta^n(Q)$ im Fall $\beta < 0.5$ sieht man, daß der Attraktor das Produkt der Cantormenge C_β in I mit dem Intervall I ist. Die Dimensionsformel für Hausdorff und Box-Counting Dimension folgt mit 2.3.5. (2) und (3).

(2) Wieder sieht man aus obigen geometrischen Überlegungen, daß der Attraktor im Fall $\beta \geq 0.5$ das ganze Quadrat Q ist, dessen Hausdsorff und Box-Counting Dimension mit der topologischen Dimension übereinstimmt.

$\square$

In dieser Arbeit wird der Fall $\beta > 0.5$, also die Fat Baker's Transformation, untersucht. Statt f_β schreiben wir im folgenden oftmals kurz f, wobei $\beta > 0.5$ als beliebig, aber fest gewählt, vorausgestzt sein soll. Es bleibt anzumerken, daß sich sämtliche Konstruktionen und Beweise in diesem dritten Abschnitt weitgehend analog für den Fall $\beta \leq 0.5$ durchfhren lassen. In Abschnitt 4 wird sich jedoch zeigen, daß ergodische Maße im Hinblick auf auf das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für bestimmte $\beta > 0.5$ interessantere Eigenschaften aufweisen.

3.2. Zusammenhang zur Shift-Dynamik

Σ bezeichne den vollen Shiftraum zur Menge $\{-1, 1\}$, also $\Sigma = \{-1, 1\}^{\mathbf{Z}}$. Versehen mit der üblichen Metrik

$$d((s_k), (s'_k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|s_k - s'_k|}{2} 2^{-|k|}$$

wird Σ ein kompakter metrischer Raum. Σ^+ bezeichne den positiven und Σ^- den negativen Halbshiftraum, d.h. $\Sigma^+ = \{-1, 1\}^{\mathbf{N_0}}$ und $\Sigma^- = \{-1, 1\}^{\mathbf{Z}^-}$.
σ sei der Rechts-Shift auf Σ (bzw. auf Σ^-) : $\sigma((s_k)) = (s_{k-1})$.
Betrachte folgende Abbildung:

$$\pi^- : \quad \Sigma^- \longmapsto I \quad \text{mit} \quad \pi^-((s_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k} 2^{-k}$$

Aus der Analysis ist bekannt, daß π^- surjektiv und stetig ist. Es handelt sich nämlich um die, der signierten dyadischen Entwicklung zugehörige Abbildung von Σ^- (interpretiert als Ziffern der Entwicklung) nach I. Die Entwickung einer Zahl aus I, also die Umkehrung von π^-, ist nicht eindeutig für $S^- := \{\frac{k}{2^n} | n \in \mathbf{N_0} \;\; k = -2^n + 1, \ldots, 2^n - 1\} \subseteq I$.
Bekanntermaßen ist es jedoch möglich π^- einzuschränken.
Sei $D^- = \{(s_k) \in \Sigma^- | \exists k_0 \in \mathbf{Z}^- \; \forall k \leq k_0 : s_k = 1\} \backslash \{(1)\}$, $\bar{\Sigma}^- = \Sigma^- \backslash D^-$ und $\bar{\pi}^-$ die Einschränkung von π^- auf $\bar{\Sigma}^-$. $\bar{\pi}^-$ ist eine Bijektion von $\bar{\Sigma}^-$ nach I.

Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit ι. ι ist stetig auf $I\backslash S^-$.

Wir betrachten nun die, der β-adischen Entwicklung zugehörige, Abbildung für $1 > \beta \geq 1/2$:

$$\pi^+ : \quad \Sigma^+ \longmapsto I \quad mit \quad \pi^+((s_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k$$

Für $\beta = 1/2$ entspricht π^+ genau π^-, wenn man Σ^+ durch Σ^- ersetezt. Der Vollständigkeit halber beweisen wir folgendes einfache Lemma:

Lemma 3.2.1.

π^+ ist wohldefiniert, stetig und surjektiv.

Beweis:

(1) π^+ ist wohldefiniert: $\quad |\sum_{k=0}^{n} s_k(1-\beta)\beta^k| \leq (1-\beta)\sum_{k=0}^{n}\beta^k$
Mit der geometrischen Reihe sieht mann also, daß der Grenzwert nach dem Majorantenkriterium für belibiges $s_k \in \Sigma^+$ existiert, und es folgt $\pi^+((s_k)) \in I$.

(2) π^+ ist stetig: $\quad d((s_k),(s_k^{'})) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow s_k = s_k^{'}\ f\ddot{u}r\ k = 0,\ldots,n \Rightarrow$
$|\pi^+((s_k) - \pi^+((s_k^{'}))| = |\sum_{k=n+1}^{\infty}(s_k - s_k^{'})(1-\beta)\beta^k| \leq 2(1-\beta)\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta^k =$
$2\beta^n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

(3) π^+ ist surjektiv: $\quad$ Sei $x \in I$ beliebig gewählt.
Wir konstruieren induktiv eine Folge $(s_k) \in \Sigma^+$ mit:

$$x \in I(s_0,\ldots,s_N)\ \forall N \geq 0 \text{ wobei}$$

$$I(s_0,\ldots,s_N) = [X_N - \beta^{N+1}, X_N + \beta^{N+1}] \text{ und } X_N = \sum_{k=0}^{N} s_k(1-\beta)\beta^k$$

Anfang $(N=0):\quad I(-1)\cup I(1) = [-1,-1+2\beta]\cup[1-2\beta,1] = [-1,1]$

$$s_0 := \left\{ \begin{array}{rl} 1 & x \in I(1) \\ -1 & x \notin I(1) \end{array} \right. \quad \Rightarrow x \in I(s_0)$$

Schritt $(N \to N+1): \quad x \in I(s_0, \ldots, s_N)$
$I(s_0, \ldots, s_N, -1) \cup I(s_0, \ldots, s_N, +1) = [X_N - \beta^{N+1}, X_N - \beta^{N+1} + 2\beta^{N+2}] \cup [X_N + \beta^{N+1} - 2\beta^{N+2}, X_N + \beta^{N+1}] = I(s_0, \ldots, s_N)$

$$s_{N+1} := \{ \begin{array}{rl} 1 & x \in I(s_0, \ldots, s_N, 1) \\ \\ -1 & x \notin I(s_0, \ldots, s_N, 1) \end{array} \qquad \Rightarrow x \in I(s_0, \ldots, s_{N+1})$$

Mit dem Einschnürungssatz folgt $\pi^+((s_k)) = x$.

□

Aus den Komponenten π^+ und π^- läßt sich eine Abbildung definieren, die Shift und Fat Baker's Transformation auf einer invarianten Teilmenge von Σ konjugiert:

$$\pi : \quad \Sigma \longrightarrow Q \quad mit \quad \pi((s_k)) = (\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k})$$

Sei $D = \{(s_k) \in \Sigma | \exists k_0 \in \mathbf{Z}\ \forall k \leq k_0 : s_k = 1\} \backslash \{(1)\}$, $\bar{\Sigma} = \Sigma \backslash D$ und $\bar{\pi}$ die Einschränkung von π auf $\bar{\Sigma}$. Offensichtlich sind D und $\bar{\Sigma}$ invariant unter σ und σ^{-1}.

Satz 3.2.2.

(1) π ist wohldefiniert, stetig und surjektiv.
(2) $\pi \circ \sigma((s_k)) = f \circ \pi((s_k)) \quad \forall (s_k) \in \bar{\Sigma}$

Beweis:

(1) folgt mit der Wohldefiniertheit, Stetigkeit und Surjektivität von π^+ und π^-.
(2) Sei $(s_k) \in \bar{\Sigma}$. Es gilt $(s_k)_{k \in \mathbf{Z}^-} \neq (\ldots, 1, 1, -1)$ und somit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k} \geq 0 \Leftrightarrow s_{-1} = 1$$

$$f \circ \pi((s_k)) = f(\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k}) =$$

$$= \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty}(1-\beta)\beta^{k+1}s_k + (1-\beta), \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k+1} - 1) \; für \; s_{-1} = +1 \\ (\sum_{k=0}^{\infty}(1-\beta)\beta^{k+1}s_k - (1-\beta), \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k+1} + 1) \; für \; s_{-1} = -1 \end{cases}$$

$$= (\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)\beta^k s_{k-1} + (1-\beta)s_{-1}, \sum_{k=0}^{\infty} s_{-k-1}2^{-k} - s_{-1})$$

$$= (\sum_{k=0}^{\infty}(1-\beta)\beta^k s_{k-1}, \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k-1}2^{-k}) = \pi((s_{k-1})) = \pi \circ \sigma((s_k))$$

□

Da $\bar{\pi}$ offenbar nicht injektiv ist, liegt hier keine eindeutige symbolische Codierung vor. Nach der Terminologie in [DGS,3.10.] bezeichnet man (Q, f) als Faktor von $(\bar{\Sigma}, \sigma)$. $(\bar{\Sigma}, \sigma)$ kann nicht als "genaue" symbolische Beschreibung der Dynamik der Fat Baker's Transformation betrachtet werden, trotzdem läßt sich folgendes Korollar über die Dynamik ableiten:

Korollar 3.2.3.

(1) Die Fat Baker's Transformation besitzt periodische Orbits beliebiger Periode in Q.
(2) Die Menge der periodischen Orbits der Fat Baker's Transformation in Q liegt dicht in Q.
(3) Es existieren Trajektorien der Fat Baker's Transformation, die dicht in Q liegen.

Beweis:

(1) Es existieren periodische Orbits beliebiger Periode für den Shift in $\bar{\Sigma}$. Bilder von Punkten dieser Orbits unter $\bar{\pi}$ sind paarweise verschieden, da insbesondere die y-Komponente paarweise verschieden ist. Mit 3.2.2.(2) ist das Bild eines dieser Orbits ein periodisches Orbit der Fat Backers Transformation. Damit folgt die Behauptung.

(2) Die Menge der Shift-periodischen Orbits in $\bar{\Sigma}$ liegt dicht in Σ. Das Bild dieser Menge unter $\bar{\pi}$ besteht nach 3.3.2.(2) aus periodischen Orbits der Fat Baker's Transformation und liegt mit der Stetigkeit und Surjektivitä von π nach 3.2.2.(1) dicht in Q.

(3) Es gibt Punkte aus $\bar{\Sigma}$ deren Shift-Trajektorien dicht in Σ liegen. Bilder dieser Trakektorien unter $\bar{\pi}$ bilden nach 3.2.2.(2) Trajektorien der Fat Backers Transformation. Mit der Stetigkeit und Surjektivität von π aus 3.2.2.(1) liegen diese dicht in Q.

□

3.3. Invariante Maße und Entropie

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt definierten Abbildung π lassen sich invariante bzw. ergodische Maße unter der Fat Baker's Transformation als Bilder von Shift-invarianten bzw. Shift-ergodischen Maßen darstellen. Definiere hierzu:

$$\pi^* : M(\Sigma) \longmapsto M(Q) \;\text{ durch }\; \pi^* b(B) = b(\pi^{-1}B) \;\; \forall B \in B(Q)$$

Mit 2.1.1. und 3.2.2. ist die Abbildung π^* surjektiv,stetig und affin.

Satz 3.3.1.

Die Einschränkung von π^* auf $M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ ist surjektiv nach $M_{inv}(Q, f)$ und erhöht die maßtheoretische Entropie nicht. Weiterhin ist die Einschränkung von π^* auf $M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ surjektiv nach $M_{erg}(Q, f)$. Formal ausgedrückt gilt also:
(1a) $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma) \Rightarrow \pi^* b \in M_{inv}(Q, f)$
(1b) $b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma) \Rightarrow \pi^* b \in M_{erg}(Q, f)$
(2a) $\forall \mu \in M_{inv}(Q, f) \;\; \exists b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma) \;$ mit $\; \pi^* b = \mu$
(2b) $\forall \mu \in M_{erg}(Q, f) \;\; \exists b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma) \;$ mit $\; \pi^* b = \mu$
(3) $h_b(\sigma) \geq h_{\pi^* b}(f) \;\; \forall b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$

Beweis:

(1a) Sei $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$. Da π Shift und Fat Baker's Transformation nur auf der invarianten Menge $\bar{\Sigma} = \Sigma \backslash D$ konjugiert, zeigen wir zunächst $b(D) = 0$ und damit dann die Invarianz von $\pi^* b$.
$D = \bigcup_{l \in Z} D_l \;$ wobei $\; D_l := \{(s_k) \in \Sigma \mid s_l = -1 \wedge s_k = 1 \; \forall k < l\}$

Es gilt $\sigma^{-k}(D_l) \cap \sigma^{-j}(D_l) = \emptyset$ für $k \neq j$ und alle l aus $\mathbf{Z}$. Damit folgt:

$$1 \geq b(\bigcup_{k=0}^{\infty} \sigma^{-k}(D_l)) = \sum_{k=0}^{\infty} b(\sigma^{-k}(D_l)) = \sum_{k=0}^{\infty} b(D_l) \Rightarrow b(D_l) = 0 \Rightarrow b(D) = 0$$

$\pi^* b(f^{-1}B) = b(\pi^{-1} f^{-1} B) = b((\pi^{-1} f^{-1} B) \backslash D) = b((\sigma^{-1} \pi^{-1} B) \backslash D) =$
$b(\sigma^{-1}\pi^{-1}B) = b(\pi^{-1}B) = \pi^* b(B) \quad \forall B \in B(Q) \quad \Rightarrow \pi^* b$ ist f-invariant

(1b) Sei b nun $\sigma-$ergodisch
$f^{-1}B = B \Rightarrow \sigma^{-1}(\pi^{-1}(B) \backslash D) = \pi^{-1} f^{-1}(B) \backslash D = \pi^{-1}(B) \backslash D$
$\Rightarrow b(\pi^{-1}(B) \backslash D) \in \{0,1\} \Rightarrow \pi^* b(B) = b(\pi^{-1}B) \in \{0,1\}$
Zusammen mit (1a) folgt also, daß $\pi^* b$ f-ergodisch ist.

(2a) Sei $\mu \in M_{inv}(Q, f)$. Da π^* surjektiv ist existiert ein $\hat{b}$ aus $M(\Sigma)$ mit $\pi^* \hat{b} = \mu$. Wie in (1) zeigen wir zunächst $\hat{b}(D) = 0 \quad (\star)$.
Mit der Terminologie aus 3.1. und 3.2. erhalten wir:

$$\pi(D) = I \times S^- \cup [-1, 1) \times \{1\}$$

Wir zeigen mit Hilfe der Invarianz von μ, daß das Maß beider Mengen der Vereinigung Null ist.

$$I \times S^- = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(S) \quad \text{wobei} \quad f^{-k}(S) \cap f^{-j}(S) = \emptyset \quad \text{für} \quad k \neq j$$

$$\Rightarrow \mu(I \times S^-) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(S)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(S) \Rightarrow \mu(S) = 0 \Rightarrow \mu(I \times S^-) = 0$$

$[-1, 1) \times \{1\} \subseteq f^{-n}([1 - 2\beta^n, 1) \times \{1\}) \Rightarrow$
$\mu([-1, 1) \times \{1\}) \leq \mu([1 - 2\beta^n, 1) \times \{1\}) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$
$\Rightarrow \mu([-1, 1) \times \{1\}) = 0.$

Insgesamt gilt also $\hat{b}(\pi^{-1}(\pi D)) = \mu(\pi(D)) = 0$ und somit $\hat{b}(D) = 0$.

Da $\hat{b}$ nicht notwendig σ-invariant ist, konstruieren wir aus $\hat{b}$ ein b mit den gewünschten Eigenschaften. Setze hierzu:

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \hat{b} \circ \sigma^{-i} \in M(\Sigma)$$

Es gilt:

$$b_n(\pi^{-1}B) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\hat{b}(\sigma^{-i}\pi^{-1}B) =^{\star} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\hat{b}(\pi^{-1}f^{-i}B)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\mu(f^{-i}B) = \mu(B) \quad \forall B \in B(Q)$$

$M(\Sigma)$ ist kompakt in der *schwach**-Topologie, so daß ein Häufungspunkt $b \in M(\Sigma)$ von b_n bezüglich diser Topologie existiert.
Es gilt:

$$b(\pi^{-1}B) = \lim_{k\longrightarrow\infty} b_{n_k}(\pi^{-1}B) = \mu(B) \quad \forall B \in B(Q) \Rightarrow \pi^*b = \mu$$

Es verbleibt noch zu zeigen, daß b tatsächlich σ-invariant ist.
Sei $B \in B(\Sigma)$ beliebig
$|b(B)-b(\sigma^{-1}B)| \leq |b(B)-b_n(B)|+|b(\sigma^{-1}B)-b_n(\sigma^{-1}B)|+|b_n(\sigma^{-1}B)-b_n(B)|$
$= |b(B) - b_n(B)| + |b(\sigma^{-1}B) - b_n(\sigma^{-1}B)| + \frac{1}{n+1}|\hat{b}(B) - \hat{b}(\sigma^{-(n+1)}B)|$
Für eine Teilfolge n_k geht dieser Ausdruck gegen Null, so daß $b(B) = b(\sigma^{-1}B)$ gilt. b ist somit σ-invariant.

(2b) Sei μ nun f-ergodisch und $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ mit (2a) so gewählt, daß $\pi^*b = \mu$.
Wir nutzen hier die Ergodenzerlegung eines invarianten Maßes. Nach [PO,1.4] existiert zu b ein W-Maß m_b auf $M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ mit $m_b(M_{erg}(\Sigma, \sigma)) = 1$ so daß:

$$b(B) = \int_{M_{erg}(\Sigma,\sigma)} b_{erg}(B)dm_b \quad \forall B \in B(\Sigma)$$

Hieraus erhalten wir:

$$\mu(B) = \pi^*b(B) = \int_{M_{erg}(\Sigma,\sigma)} \pi^*b_{erg}(B)dm_b \quad \forall B \in B(Q)$$

$(\pi^*)^*m_b$ definiert ein W-Maß auf $M_{inv}(Q, f)$ mit $(\pi^*)^*m_b(\pi^*(M_{erg}(\Sigma, \sigma))) = 1$ und die obige Gleichung geht über in:

$$\mu(B) = \int_{\pi^*(M_{erg}(\Sigma,\sigma))} \mu_{erg}d(\pi^*)^*m_b \quad \forall B \in B(Q)$$

Da die Ergodenzerlegung des ergodischen Maßes μ aber eindeutig durch das Maß selber gegeben ist (d.h. das Maß auf $M_{erg}(Q, f)$ ist eindeutig als Dirac

Maß zu μ bestimmt), folgt hieraus $\mu \in \pi^* M_{erg}(\Sigma, \sigma)$.

(3) Die Behauptung folgt mit Lemma 2.2.2.

$\square$

Im weiteren wird in diesem Abschnitt die Entropie der Bilder der Bernoulli Maße unter π^* bestimmt. Hierzu einige Vorbemerkungen:

Für $p \in [0,1]$ bezeichne b_p das Bernoulli Maß aus $M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ mit den Gewichten $p, (1-p)$, d.h. b_p ist das Produktmaß auf Σ des Maßes auf $\{-1, 1\}$, daß 1 die Wahrscheinlichkeit p und -1 die Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ zuordnet. Die analog definierten Bernoulli Maße auf Σ^+ und Σ^- bezeichnen wir auch mit b_p.
Mit der signierten dyadischen Enticklung ι lassen sich Bernoulli Maße $\bar{b}_p$ auch auf dem Intervall I definieren: $\bar{b}_p(B) := b_p(\iota(B))$ für $B \in B(I)$.
Angemerkt sei hier, daß $\bar{b}_{0.5}$ das normierte Lebesgue Maß ℓ auf I ist.
Die Maße $\bar{b}_p$ sind ergodich bezüglich der Transformation $\bar{\sigma}$ von I die dem Shift der Ziffern der Entwicklung entspricht. Wie in 3.2.2.(2) sieht man, daß diese Abbildung durch

$$\bar{\sigma}(y) = \begin{cases} 2y + 1 \; für \; y \geq 0 \\ 2y - 1 \; für \; y < 0 \end{cases}$$

gegeben ist.
Die maßtheoretische Entropie der Bernoulli Maße b_p und $\bar{b}_p$ ist durch $-(p \log p + (1-p)\log(1-p))$ bestimmt.
Zu diesen Ausführungen vgl. [DGS,8.13,12.4.].

Wir definieren nun:

$$\mu_p := \pi^* b_p$$

Nach 3.3.1.(1) ist μ_p ergodisch in Bezug auf die Fat Baker's Transformation. Falls, wie etwa in Abschnitt 4, die Abhängigkeit vom Parameter der Fat Baker's Transformation β eine Rolle spielt, wird zusätzlich durch β indiziert:

$$\mu_{\beta,p} := \pi^*_\beta b_p \in M_{erg}(Q, f_\beta)$$

Lemma 3.3.2.

$h_{\mu_p}(f) = h_{b_p}(\sigma) = -(p \log p + (1-p)\log(1-p))$

Beweis:

Mit Satz 3.3.1.(3) folgt sofort $h_{\mu_p}(f) \leq h_{b_p}(\sigma)$, es verbleibt also nur noch $h_{\mu_p}(f) \geq h_{b_p}(\sigma)$ zu zeigen. Hierzu projiziert man das System (Q, f, μ_p) auf die y-Achse.
pr_Y, die Projektion von Q auf die y-Achse, ist stetig und surjektiv auf I und offensichtlich gilt: $pr_Y \circ f = \bar{\sigma} \circ pr_Y$. Wir zeigen:

$$pr_Y^* \mu_p = \bar{b}_p$$

$pr_Y^* \mu_p(B) = \mu_p(I \times B) = b_p(\pi^{-1}(I \times B)) = b_p(\Sigma^+ \times (\pi^-)^{-1}B) = b_p((\pi^-)^{-1}B)$
$=^\star b_p(((\pi^-)^{-1}B) \backslash D^-) = b_p(\iota(B)) = \bar{b}_p(B) \ \forall B \in B(I)$
$\star$: $b_p(D^-) = b_p(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{(s_k) \in \Sigma^- | s_{-i} = -1 \wedge s_k = 1 \quad \forall k < -i\}) = 0$

Mit Lemma 2.2.2. folgt $h_{\mu_p}(f) \geq h_{\bar{b}_p}(\bar{\sigma})$, was den Beweis vervollständigt.

$\square$

Korollar 3.3.3.

$\mu_{0.5}$ ist das eindeutig bestimmte Maß aus $M_{inv}(Q, f)$, daß die Entropie mit $\log 2$ maximiert.

Beweis:

Nach 3.3.2. gilt $h_{\mu_{0.5}}(f) = \log 2$. Sei nun $\mu \in M_{inv}(Q, f)$ und $\mu \neq \mu_{0.5}$.
Nach 3.3.1.(2) existiert ein $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ mit $\pi^* b = \mu$, wobei $b \neq b_{0.5}$.
Da $b_{0.5}$ das eindeutig bestimmte Maß in $M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ ist, das die Entropie mit $\log 2$ maximiert (vgl. [WA,8.9.]), gilt $h_b(\sigma) < \log 2$ und so mit 3.3.1.(3) $h_\mu(f) < \log 2$.

$\square$

Die Maße μ_p bzw. $\mu_{\beta,p}$ werden in Abschnitt 4 näher betrachtet.

3.4. Unstabile Dimension

Setze $W^u(x) = \{x\} \times I$ für $x \in I$. Die $W^u(x)$ werden wir als unstabile Fasern bezeichnen. Diese Terminologie wird durch nachstehendes Lemma nahegelegt, das die Wirkung der Fat Baker's Transformation auf die Fasern beschreibt.

Lemma 3.4.1.

Sei $H^+ = I \times [0,1]$, $H^- = I \times [-1,0)$ und $x \in I$ sowie $U \subseteq Q$.
(1) Falls $U \cap W^u(x) \subseteq H^+$ oder $U \cap W^u(x) \subseteq H^-$ gilt:
$f(U \cap W^u(x)) \subseteq W^u(x^{'})$ für ein $x^{'} \in I$ und
$diam(f(U \cap W^u(x))) = 2diam(U \cap W^u(x))$
(2) Falls $U \cap W^u(x) \cap H^+ \neq \emptyset$ und $U \cap W^u(x) \cap H^- \neq \emptyset$ gilt:
$diam(W^u(x) \cap U) \leq \epsilon \Rightarrow diam(f(U \cap W^u(x))) \geq 2 - 4\epsilon$

Beweis:

(1) $U \cap W^u(x) = \{x\} \times J$ mit $J \subseteq [0,1]$ oder $J \subseteq [-1,0) \Rightarrow$
$f(U \cap W^u(x)) = \{\beta x + (1-\beta)\} \times h_1(J)$ falls $J \subseteq [0,1]$
$f(U \cap W^u(x)) = \{\beta x - (1-\beta)\} \times h_2(J)$ falls $J \subseteq [-1,0)$
wobei $h_1(y) = 2y - 1$ und $h_2(y) = 2y + 1$. Da sowohl h_1 als auch h_2 J mit Faktor 2 linear expandieren, folgt auch die zweite Aussage von (1).

(2) Unter den Voraussetzungen von (2) gilt:
$diam(W^u(x) \cap U) \leq \epsilon \Rightarrow W^u(x) \cap U \subseteq \{x\} \times [-\epsilon, \epsilon]$, wobei der Schnitt von $W^u(x) \cap U$ mit $[-\epsilon, 0)$ und mit $[0, \epsilon]$ nicht leer ist $\Rightarrow$
$f(U \cap W^u(x)) \subseteq \{\beta x + (1-\beta)\} \times [-1, -1+2\epsilon] \cup \{\beta x - (1-\beta)\} \times [1-2\epsilon, 1]$
Da der Schnitt von $f(U \cap W^u(x))$ mit beiden Mengen dieser Vereinigung nicht leer ist, folgt die Behauptung.

$\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas wird eine Dimensionsabschätzung bewiesen:

Satz 3.4.2.

Für alle $G \subseteq Q$ und $x \in I$ gilt:

$$dim_H(W^u(x) \cap G) \leq \frac{h(G,f)}{\log 2}$$

Beweis:

Seien $G \subseteq Q$ und $x \in I$ fest gewählt und Υ eine endliche, offene Überdeckung von Q mit $diam\Upsilon < 1\backslash 3$.

Zur Abkürzung setze $h = h_\Upsilon(G, f)$ und $n(U) = n_\Upsilon(U)$. Aus der Definition der topologischen Entropie in 2.2.3. ergibt sich:
$\forall \epsilon, \alpha > 0$ existiert eine Überdeckung Γ von G, so daß:

$$D_\Upsilon(\Gamma, h+\epsilon) = \sum_{U \in \Gamma} \exp(-n(U)(h+\epsilon)) \leq \alpha \tag{1}$$

Wir zeigen:

$$diam(f^{n(U)}(U \cap W^u(x))) \geq 2^{n(U)} diam(U \cap W^u(x)) \tag{2}$$

1. Fall: Für $n(U) = 0$ ist die Aussage trivial.
2. Fall: $n(U) = 1$
Falls die Voraussetzungen von 3.4.1.(a) erfüllt sind, folgt die Aussage sofort. Seien also die Voraussetzungen 3.4.1.(b) efüllt: Da $U \cap W^u(x)$ in einem Element von Υ enthalten ist, gilt: $diam(U \cap W^u(x)) \leq 1\backslash 3$
$\Rightarrow diam(f(U \cap W^u(x))) \geq 2 - 4\backslash 3 = 2\backslash 3 \geq 2 diam(U \cap W^u(x))$
3.Fall: $n(U) > 1$

Wir zeigen hier zunächst durch Widerspruch:
(*) $\forall i \in \{0, \ldots, n(U)-2\}$ $(f^i(U \cap W^u(x)) \subseteq H^+ \ \vee \ f^i(U \cap W^u(x)) \subseteq H^-)$
Sei c die kleinste Zahl mit $f^c(U \cap W^u(x)) \cap H^+ \neq \emptyset \wedge f^c(U \cap W^u(x)) \cap H^- \neq \emptyset$
Falls (*) nicht erfüllt ist, gilt $0 \leq c \leq n(U) - 2$
Nach der Definition von $n(U)$ ist $f^c(U \cap W^u(x))$ in einem Element von Υ enthalten, und daher ist $diam(f^c(U \cap W^u(x))) \leq 1\backslash 3$.
Mit 3.4.1. folgt $diam(f^{c+1}(U \cap W^u(x))) \geq 2\backslash 3$, und somit ist $f^{c+1}(U \cap W^u(x))$ in keinem Element von Υ enthalten. Da $c + 1 \leq n(U) - 1$ ist, steht dies im Widerspruch zur Definition von $n(U)$.

Aus (*) folgt durch wiederholte Anwendung von 3.4.1.(a):
$diam(f^{n(U)-1}(U \cap W^u(x))) = 2^{n(U)-1} diam(U \cap W^u(x))$ und
$f^{n(U)-1}(U \cap W^u(x)) \subseteq W^u(x')$ für ein $x' \in I$.
Da $f^{n(U)-1}(U \cap W^u(x))$ in einem Element von Υ enthalten ist, folgt
$diam(f^{n(U)}(U \cap W^u(x))) \geq 2^{n(U)} diam(U \cap W^u(x))$ wie im Fall 2.

Damit ist die Ungleichung (2) bewiesen.

$\bar{\Gamma} = \{U \cap W^u(x) | U \in \Gamma\}$ ist eine Überdeckung von $G \cap W^u(x)$

Wir erhalten:

$$\sum_{\bar{U}\in\bar{\Gamma}}(diam\bar{U})^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}} = \sum_{U\in\Gamma}(diam(U\cap W^u(x)))^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}}$$

$$\leq^{(2)} \sum_{U\in\Gamma}(\frac{diam(f^{n(U)}(U\cap W^u(x)))}{2^{n(U)}})^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}} \leq \sum_{U\in\Gamma}(\frac{diam(Q)}{2^{n(U)}})^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}}$$

$$= diam(Q)^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}} \sum_{U\in\Gamma} \exp(-n(U)(h+\epsilon)) \leq^{(1)} diam(Q)^{\frac{h+\epsilon}{\log 2}}\alpha$$

$$\Rightarrow dim_H(G\cap W^u(x)) \leq \frac{h+\epsilon}{\log 2} \quad \forall\epsilon > 0 \Rightarrow dim_H(G\cap W^u(x)) \leq \frac{h_\Gamma(G,f)}{\log 2}$$

$$\Rightarrow dim_H(G\cap W^u(x)) \leq \frac{h(G,f)}{\log 2}$$

□

Der Beweis von 3.4.2. ist die Adaption eines Beweises von Mannig aus [Ma] für Axiom A Diffeomorhismen an die hier vorliegende Situation eines Systems mit Singularität.

Im folgenden werden wir den Begriff von bedingten Maßen auf einer meßbaren Partition benötigen, den wir hier allgemein einführen.
X sei ein metrischer Raum und $\wp$ eine, bezüglich B(X), meßbare Partition von X. Mit $\wp(x)$ bezeichnen wir das Element von $\wp$ das x enthlt.
$B_\wp(X)$ sei die sub-σ-Algebra von $B(X)$ die aus Vereinigungen von Elementen aus $\wp$ besteht. Ein W-Maß μ aus $M(X)$ definiert (durch seine Einschrnkung) ein W-Maß auf $(X, B_\wp(X))$, daß wir auch mit μ bezeichnen. Es gilt folgender maßtheoretischer Satz:

Satz 3.4.3

Zu einem μ aus $M(X)$ existieren μ-fast berall bedingten W-Maßen μ_x auf $(\wp(x), \wp(x)\cap B(X))$ mit folgender Eigenschaft:
Für alle $B \in B(X)$ ist die Funktion $x \longrightarrow \mu_x(B\cap\wp(x))$ meßbar bezüglich $B_\wp(X)$ und es gilt:

$$\mu(B) = \int_{B_\wp(X)} \mu_x(B\cap\wp(x))d\mu$$

Die W-Maße μ_x sind bis auf μ-Nullmengen durch diese Eigenschft eindeutig bestimmt.

Dieser Satz und weitere Information zu bedingten Maßen kann in [LY,1.3.] oder [CFS,A1.4.] nachgelesen werden.

Betrachtet man nun speziell die Partition $W^u := \{W^u(x)|x \in I\}$ von Q, so gilt $B_{W^u}(Q) = \{B \times I | B \in B(I)\}$ und $B(Q) \cap W^u(x) = B(W^u(x))$.
Weiterhin erhält man für ein μ aus $M(Q)$, $\mu(B \times I) = pr_X^* \mu(B)$ für alle $B \in B(I)$.
Nach 3.4.3. existieren damit (bis auf $pr_X^*\mu$-Nullmengen) eindeutig bestimmte $\mu_x^u \in M(W^u(x))$, so daß:

$$\mu(B) = \int \mu_x^u(B \cap W^u(x)) d\ pr_X^* \mu \quad \forall B \in B(Q)$$

Für Maße aus $M_{erg}(Q, f)$ kann die Hausdorff Dimension der bedingten Maße auf den unstabilen Fasern, die man auch als unstabile Dimension bezeichnet, mittels der maßtheoretischen Entropie abgeschätzt werden:

Satz 3.4.4.

Für $\mu \in M_{erg}(Q, f)$ gilt:

$$dim_H \mu_x^u \leq \frac{h_\mu(f)}{\log 2}$$

für fast alle $x \in I$ in Bezug auf $pr_X^* \mu$.

Beweis:

Unter Verwendung des Birkhoffschen Ergodensatzes 2.1.3. erhält man für ergodische Maße μ:

$$\mu(G_\mu(Q, f)) = 1 \Rightarrow \int \mu_x^u(G_\mu(Q, f) \cap W^u(x)) dpr_X^* \mu = 1$$

$$\Rightarrow \mu_x^u(G_\mu(Q, f) \cap W^u(x)) = 1 \quad f\ddot{u}r\ pr_X^* \mu - f.a.\ x \in I$$

Hiermit und unter Verwendung von 3.4.2. ergibt sich:

$$dim_H \mu_x^u = inf\{dim_H W | W \subseteq W^u(x) \ \wedge \ \mu_x^u(W) = 1\}$$

$$\leq dim_H(G_\mu(Q,f) \cap W^u(x)) \leq \frac{h(G_\mu(Q,f),f)}{\log 2} \quad f\ddot{u}r \ pr_X^* \mu - f.a. \ x \in I$$

Nach Bowen's Satz (siehe 2.2.4.(3)) gilt aber $h(G_\mu(Q,f),f) = h_\mu(f)$.

□

Erst in Anschnitt 5.5. werden wir, mit Hilfe von Ergebnissen über den Lift der Fat Baker's Transformation, aus der Abschätzung der unstabilen Dimension in 3.4.4. eine Abschätzung der Hausdorff Dimension beliebiger ergodischer Maße herleiten.

4. Unendlich gefaltete Bernoulli Maße und die Maße $\mu_{\beta,p}$

In diesem Abschnitt werden unendlich gefaltete Bernoulli Maße diskutiert.Es werden einige Resultate aus der Literatur, insbesondere zur Frage der Singularität dieser Maße, zusammengestellt. Die Relevanz unendlich gefalteter Bernoulli Maße für die Fat Baker's Transformation wird durch ein Lemma deutlich, das zeigt, daß die Maße $\mu_{\beta,p}$ ein Produkt aus unendlich gefaltetem Bernoulli Maß und Bernoulli Maß sind. Im weiteren skzieren wir den Beweis von Alexander und Yorke aus [AY], der zeigt, daß $\mu_{\beta,0.5}$ das SRB-Maß der Fat Baker's Transformation ist. Die Analyse unendlich gefalteter Bernoulli Maße wird daraufhin durch die Definition einer Art Entropie im Stile Garsia's (nach [GA1] und [GA2]) fortgesetzt. Eine Abschätzung dieser Entropie von Garsia wird leicht verallgemeinert. Zum Abschluss wird die Rényi Dimension unendlich gefalteter Bernoulli Maße und damit dann die Hausdorff Dimension dieser Maße und der Maße $\mu_{\beta,p}$ mittels der Garsia Entropie abgeschätzt.

4.1. Grundlegendes

$A_{0,p}, A_{1,p}, A_{2,p} \ldots$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen die, die Werte $+1, -1$ mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$ annehmen.

$$Y_{\beta,p} := \sum_{i=0}^{\infty} A_{i,p}(1-\beta)\beta^i \quad \beta \in (0,1)$$

$\nu_{\beta,p}$ sei das durch die Zufallsvariabele $Y_{\beta,p}$ induzierte W-Maß:

$$\nu_{\beta,p}(B) := Prob\{Y_{\beta,p} \in B\}$$

Mit der in Abschnitt 3 entwickelten Terminologie läßt sich $\nu_{\beta,p}$ als Bild des Bernoulli Maßes b_p auf Σ^+ unter $(\pi^+)^*$ darstellen:

$$\nu_{\beta,p}(B) = Prob\{Y_{\beta,p} \in B\} = b_p(\{(s_k) \in \Sigma^+ | \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k \in B\})$$

$$= b_p((\pi^+)^{-1}B) = (\pi^+)^* b_p(B) \quad \forall B \in B(I)$$

Die $\nu_{\beta,p}$ sind also Borel W-Maße auf I, $\nu_{\beta,p} \in M(I)$.
Eine weitere Möglichkeit die $\nu_{\beta,p}$ darzustellen ist die unendliche Faltung:

$$\nu_{\beta,p} = b_p(1-\beta) * b_p((1-\beta)\beta) * \ldots * b_p((1-\beta)\beta^n) * \ldots$$

Es ist daher naheliegend die $\nu_{\beta,p}$ als unendlich gefaltete Bernoulli Maße zu bezeichnen. In der Literatur zu diesen Maßen wird zumeist der Fall $p = 0.5$ betrachtet, wir werden für $\nu_{\beta,0.5}$ kurz ν_β schreiben.
Man kann sich ν_β als Maß für die Dichte von Punkten der Form $\sum_{k=0}^{\infty} \pm(1-\beta)\beta^k$ veranschaulichen. Präzise gesagt gilt:

$$\nu_\beta(B) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{\sharp\{\sum_{k=0}^{N-1} \pm(1-\beta)\beta^k \in B\}}{2^N} \quad \forall B \in B(I)$$

wobei $\sharp$ Anzahl der Punkte unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit bedeutet.

Zu der bis hierhin zugrundegelegten Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. Maßtheorie und insbesondere zu Fragen der Konvergenz der verwendeten Ausdrücke vergeiche [JW].

Unendlich gefaltete Bernoulli Maße sind seit den 30er Jahren dieses Jahrhunderts untersucht worden. Jessen und Winter zeigten 1935 in [JW], daß ν_β in Abhängigkeit von β entweder absolut stetig oder rein singulär ist. Im Fall $\beta \in (0, 0.5)$ ist ν_β auf die Cantormenge C_β konzentriert und und damit rein singulär. Für den Grenzfall $\beta = 0.5$ ist ν_β das auf I normierte Lebesgue Maß.
Erdös fand 1939 in [ER1] einen faszinierenden Zusammenhang zwischen einer zahlentheoretischen Eigenschaft von $\beta \in (0.5, 1)$ und der Singularität der Maße ν_β, der hier dargestellt werden soll.

Eine Pisot-Vijayarghavan Zahl (kurz PV-Zahl) ist eine ganz-algebraische Zahl (d.h. die reelle Lösung einer algebraichen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathbf{Z}$ und höchstem Koeffizienten plus oder minus eins), deren Konjugierte sämtlich Betrag kleiner als eins haben. PV sei die Menge aller PV-Zahlen. PV ist nach Salem [SA] eine abgeschlossene (und offensichtlich abzählbare) Teilmenge der reelen Zahlen. Mehr über PV-Zahlen, die in der algebraischen Zahlentheorie eine Rolle spielen, findet sich in [BDGPS].

Satz 4.1.1. [Erdös]

Für $\beta \in (0.5, 1)$ und $\beta^{-1} \in PV$ ist ν_β singulär.

In Erdös Beweis aus [ER1] wird die Fourier-Stieltjes Transformation $\phi_{\nu_\beta}(\omega)$ des Maßes ν_β betrachtet:

$$\phi_{\nu_\beta}(\omega) := \int_{-1}^{1} \exp(i\omega x) dF_{\nu_\beta}(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \cos((1-\beta)\beta^i \omega)$$

wobei $F_{\nu_\beta}(x) = \nu_\beta([-1, x))$ die Dichte des Maßes ist. Erdös gelingt es zu zeigen, daß für $\beta^{-1} \in PV$ das Produkt mit $\omega \longrightarrow \infty$ nicht gegen Null konvergiert, so daß durch das Riemann-Lebesgue Lemma, folgt das ν_β nicht absolut stetig ist. Mit dem Satz von Jessen und Winter folgt so die Singularität.

Beispiele für Werte $\beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV$ sind die positiven Wurzeln der Polynome

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1 \text{ mit } n \geq 2,$$

die eine gegen 0.5 fallende Folge bilden. Einer dieser Werte ist der goldene Schnitt $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Die grösste Zahl aus $(0.5, 1)$, deren Reziprok in PV, liegt ist die reelle Wurzel von $x^3 + x^2 - 1$ (vgl. [AY,S.9]).

Es gelang Erdös auch zu zeigen, daß ein ϵ existiert, so daß ν_β für Lebesgue-fast alle $\beta \in (1-\epsilon, 1)$ absolut stetig ist (vgl. [ER2]). Erst 1995 wurde dieses Resultat von Solomyak in [SO] auf das ganze Intervall $(0.5, 1)$ verallgemeinert:

Satz 4.1.2. [Solomyak]

Für Lebesgue-fast alle $\beta \in (0.5, 1)$ ist ν_β absolut stetig und hat eine L^2-Dichte.

Ein vereinfachter Beweis dieses Satzes wird in [PS] gegeben.
Beispiele für Werte von $\beta \in (0.5, 1)$, für die ν_β absolut stetig ist, sind die n-ten Wurzeln von 0.5 (siehe [WI]).

Zum Abschluß dieser Darstellung ist anzumerken, daß die Frage, ob Reziprioke von PV Zahlen die einzigen $\beta \in (0.5, 1)$ sind, für die ν_β singulär wird, bis heute offen ist.

Die Relevanz unendlich gefalteter Bernoulli Maße für unsere Untersuchung der Fat Baker's Transformation wird durch nachstehendes Lemma deutlich.

Lemma 4.1.3.

Sei $\mu_{\beta,p}$ aus $M_{erg}(Q, f_\beta)$ wie in 2.3. definiert, dann gilt:

$$\mu_{\beta,p} = \nu_{\beta,p} \times \bar{b}_p$$

D.h. $\mu_{\beta,p}$ ist ein Produkt aus unendlich gefaltetem Bernoulli Maß in x-Richtung und Bernoulli Maß in y-Richtung.

Beweis:

pr^+ bezeichne die Projektion von Σ auf Σ^+ und pr^- die Projektion auf Σ^-. Wie oben sei pr_X die Projektion auf die x-Achse und pr_Y die Projektion auf die y-Achse.

$\mu_{\beta,p}(B) = b_p(\pi^{-1}B) = b_p(pr^+(\pi^{-1}B)) \cdot b_p(pr^-(\pi^{-1}B)) =^\star b_p((\pi^+)^{-1}pr_X B) \cdot b_p((\pi^-)^{-1}pr_Y B) = (\pi^+)^* b_p(pr_X B) \cdot b_p(\iota(pr_Y B)) = \nu_{\beta,p}(pr_X B) \cdot \bar{b}_p(pr_Y B)$
$= (\nu_{\beta,p} \times \bar{b}_p)(B) \;\; \forall B \in B(Q)$

Für die Identität $\star$ ist noch zu verifizieren:
(1) $pr^+\pi^{-1}(B) = (\pi^+)^{-1}(pr_X B)$ und (2) $pr^-\pi^{-1}(B) = (\pi^-)^{-1}(pr_Y B)$

(1) $(s_k)_{k\in\mathbf{N_0}} \in pr^+\pi^{-1}(B) \Leftrightarrow \exists\ (s_k)_{k\in\mathbf{Z}^-} :\ \pi((s_k)) \in B \Leftrightarrow$
$\exists\ y \in I :\ (\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, y) \in B \ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k \in pr_X B \Leftrightarrow$
$(s_k)_{k\in\mathbf{N_0}} \in (\pi^+)^{-1}(pr_X B)$

(2) $(s_k)_{k\in\mathbf{Z}^-} \in pr^-\pi^{-1}(B) \Leftrightarrow \exists\ (s_k)_{k\in\mathbf{N_0}} :\ \pi((s_k)) \in B \Leftrightarrow$
$\exists\ y \in I :\ (y, \sum_{k=1}^{\infty} s_k 2^{-k}) \in B \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} s_k 2^k \in pr_Y B$
$\Leftrightarrow (s_k)_{k\in\mathbf{Z}^-} \in (\pi^-)^{-1}(pr_Y B)$

$\square$

Insbesondere gilt nach 4.1.3.

$$\mu_{\beta,0.5} = \nu_\beta \times \ell$$

Dieses Produkt aus gleichgewichtetem unendlich gefaltetem Bernoulli Maß und Lebesgue Maß ist genau das von Alexander und Yorke in [AY] untersuchte Maß, das uns im nächsten Abschnitt beschäftigen wird.

4.2. Das SRB-Maß der Fat Baker's Transformation

In diesem Abschnitt wird das Hauptergebnis von Alexander und Yorke's Arbeit über die Fat Baker's Transformation dargestellt.

Satz 4.2.1. [Alexander und Yorke]

$\nu_\beta \times \ell$ aus $M_{erg}(Q, f_\beta)$ ist das SRB-Maß der Fat Baker's Transformation f_β für $\beta \in (0.5, 1)$, fast alle $x \in Q$ (in Bezug auf Lebesgue Maß) sind generisch für dieses Maß.

Es soll hier darauf verzichtet werden den Beweis in allen technischen Detailles durchzuführen, da diese in [AY,4] nachgelesen werden können. Der wesentliche Ansatz und die einzelnen Argumentationsschritte sollen jedoch kurz nachgezeichnet werden.

Beweisskizze:

Wir wählen $\beta \in (0.5, 1)$ fest und setzen $f = f_\beta$ und $\mu = \nu_\beta \times \ell$.
Nach den Definitionen in 2.1. ist zu zeigen:

$$\lim_{M \longrightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^{M} \phi(f^N(x,y)) = \int \phi d\mu \quad \forall \phi \in L^1(Q, B(Q), \mu)$$

für fast alle $(x, y) \in Q$ in Bezug auf das Lebesgue Maß.
Mit dem Rieszschen Darstellungssatz ist dies aber equivalent zu

$$\mu_M(x,y) = \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^{M} \delta_{f^N(x,y)} \longrightarrow \mu$$

für ℓ_Q-fast alle $(x, y) \in Q$, wobei δ das Dirac Maß bezeichnet und die Konvergenz bezüglich der $schwach^*$-Topologie gemeint ist.

Alexander und Yorke betrachten eine gemischte Fourier-Stieltjes Transformation ϕ_μ von Maßen aus $M(Q)$, d.h. sie bilden in x-Richtung eine Fourier-Stieltjes Transformation und in y-Richtung Fourier-Stieltjes Koeffizienten:

$$\phi_\mu(\omega, n) := \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1}^{y=1} \exp(i\omega x - in\pi y) dF_\mu(x, y)$$

wobei $F_\mu(x, y) = \mu([-1, x) \times [-1, y))$ und $(\omega, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$.
Die beiden Autoren stellen fest, daß die Konvergenz der Folge von Maßen $\mu_M(x, y)$ gegen μ equivalent ist zur punktweisen Konvergenz der korrespondierenden Fourier-Stiltjes Transformationen $\phi_{\mu_M(x,y)}$ gegen ϕ_μ
Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\phi_{\mu_M(x,y)}(\omega, n) = \frac{(-1)^n}{M+1} \sum_{N=0}^{M} \exp(i\omega\beta^N x - i\pi n 2^N y) \prod_{r=0}^{N-1} \exp(i(y)_{N-r}(1-\beta)\beta^r \omega)$$

$(y)_r$ ist in diesem Ausdruck die r-te Ziffer der signierten dyadischen Entwicklung ι von y.
Zerlegt man diesen Ausdruck in geeignete Summanden, so sieht man, daß für beliebiges ϵ ein M_1 existiert, so daß der Wert des Ausdruck für alle $M > M_1$ in der ϵ-Umgebung von

$$\frac{(-1)^n}{M - M_1} \sum_{N=M_1+1}^{M} \exp(-i\pi n 2^N y) \prod_{r=0}^{M_1-1} \exp(i(y)_{M_1-r}(1-\beta)\beta^r \omega) \quad (*)$$

liegt. Mit

$$h(y) := \exp(-i\pi n 2^{M_1} y) \prod_{r=0}^{M_1-1} \exp(i(y)_{M_1-r}(1-\beta)\beta^r \omega)$$

geht (3) über in

$$\frac{(-1)^n}{M - M_1} \sum_{N=M_1+1}^{M} h(\bar{\sigma}^{N-M_1} y)$$

wobei $\bar{\sigma}$ wie in 2.3. die Abbildung, die dem Shift der Ziffern der signierten dyadischen Entwicklung entspricht, bezeichnet. Da das auf I normierte Lebesgue Maß ℓ wie in 2.3. gesagt $\bar{\sigma}$-ergodisch ist, folgt mit dem Birkhoffschen Ergodensatz 2.1.3 die Konvergenz von (*) mit $M \longrightarrow \infty$ gegen

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} h(y) d\ell = (-1)^n \int_{-1}^{1} \exp(-i\pi n 2^{M_1} y) \prod_{r=0}^{M_1-1} \exp(i(y)_{M_1-r}(1-\beta)\beta^r \omega) d\ell$$

für ℓ-f.a. $y \in I$. Zerteilt man das Intervall I in die 2^{M_1} Teilintervalle auf denen die ersten M_1 Ziffern der signierten dyadischen Entwicklung von y konstant sind und integriert über diese, so erhält man im Fall $n \neq 0$ offensichtlich null. Im Fall $n = 0$ summieren sich die Produkte mit Hilfe der Eulerschen Formel zu:

$$\prod_{r=0}^{M_1-1} \cos((1-\beta)\beta^r \omega)$$

Der Grenzwert von $\phi_{\mu_M(x,y)}(\omega, n)$ ist damit null im Fall $n \neq 0$ und

$$\prod_{r=0}^{\infty} \cos((1-\beta)\beta^r \omega)$$

im Fall $n = 0$ und zwar für beliebiges $x \in I$ und ℓ-fast alle $y \in I$. Dies ist aber genau die (gemischte) Fourier-Stieltjes Transformation $\phi_\mu(\omega, n)$, wie man erkennt, wenn man Fourier-Stieltjes Transformation von ν_β betrachtet.

$\square$

Es ist noch anzumerken, daß das SRB-Maß $\mu_\beta \times \ell$ durch die Eigenschaft, daß Lebesgue-fast alle Punkte generisch sind, eindeutig bestimmt ist (vgl. 2.1.).

4.3. Garsia Entropie

Garsia führt in [GA1] eine Art Entropie ein, die im Zusammenhang zur Singularität der Maße ν_β steht. Wir werden den Ansatz von Garsia leicht verallgemeinern, indem wir auch den Fall $\nu_{\beta,p}$ für $p \neq 0.5$ mit einbeziehen.

(Σ_N, b_p) sei der endliche Wahrscheinlichkeitsraum $\{-1, 1\}^N$ mit dem endlichen Produktmaß.
Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_\beta$ auf Σ_N durch:

$$(s_k) \sim_\beta (s_k^{'}) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} s_k(1-\beta)\beta^k = \sum_{k=0}^{N-1} s_k^{'}(1-\beta)\beta^k$$

$\sim_\beta$ induziert eine Partition $\Gamma_{N,\beta}$ von Σ_N. $G_N(\beta, p)$ sei die Information dieser Partition bezüglich b_p, die wie üblich definiert wird:

$$G_N(\beta, p) := H_{b_p}(\Sigma_N, \Gamma_{N,\beta}) = -\sum_{A \in \Gamma_{N,\beta}} b_p(A) \log b_p(A)$$

Satz 4.3.1

Wir bezeichnen $G(\beta, p) := inf_{N \in \mathbf{N}} \frac{G_N(\beta,p)}{N}$ als Garsia Entropie. Es gilt:
(1) $G(\beta, p) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{G_N(\beta,p)}{N}$
(2) $\forall \beta$ mit $\beta^{-1} \in PV \exists \epsilon > 0 : sup\{G(\beta, p) | p \in [0,5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon]\} < \log \beta^{-1}$

Dieser Satz eingeschränkt auf p=0.5 entspricht Theorem 2 aus [GA1]. Der hier gegebene Beweis ist eine ausführliche und erweiterte Fassung der von Garsia in [GA1] und [GA2] skizzierten Beweisideen.

Beweis:

(1) Wir zeigen (wie auch bei der maßtheoretischen Entropie üblich) die Subadditivität der Folge $G_N(\beta, p)$.
Die Äquivalenzrelation $\sim_\beta$ induziert Partitionen $\Gamma_{N,\beta}$ von Σ_N und $\Gamma_{K,\beta}$ von Σ_K. $\bar{\Gamma} := \Gamma_{N,\beta} \times \Gamma_{K,\beta}$ ist eine Partition von Σ_{N+K}. Da b_p auf Σ_{N+K} ein Produkt der Maß b_p auf Σ_N und Σ_K ist, folgt:

$$H_{b_p}(\Sigma_{N+K}, \bar{\Gamma}) = H_{b_p}(\Sigma_N, \Gamma_{N,\beta}) + H_{b_p}(\Sigma_K, \Gamma_{K,\beta}) = G_N(\beta, p) + G_K(\beta, p)$$

Die Partition $\bar{\Gamma}$ wird durch folgende Äquivalenzrelation auf Σ_{N+K} induziert:

$$(s_0, \ldots, s_{N-1}, t_0 \ldots t_{K-1}) \simeq (s_0^{'}, \ldots, s_{N-1}^{'}, t_0^{'}, \ldots, t_{K-1}^{'}) :\Leftrightarrow$$

$$(s_k) \sim_\beta (s_k^{'}) \wedge (t_k) \sim_\beta (t_k^{'}) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} s_k(1-\beta)\beta^k = \sum_{k=0}^{N-1} s_k^{'}(1-\beta)\beta^k \wedge \sum_{k=0}^{K-1} t_k(1-\beta)\beta^k = \sum_{k=0}^{K-1} t_k^{'}(1-\beta)\beta^k$$

Betrachtet man nun im Vergleich $\sim_\beta$ auf Σ_{N+K}

$$(s_0, \ldots, s_{N+K-1}) \sim_\beta (s_0^{'}, \ldots, s_{N+K-1}^{'}) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N+K-1} s_k(1-\beta)\beta^k = \sum_{k=0}^{N+K-1} s_k^{'}(1-\beta)\beta^k$$

so sieht man sofort, $(s_k) \simeq (s_k^{'}) \Rightarrow (s_k) \sim_\beta (s_k^{'})$. Die Partition $\bar{\Gamma}$ ist daher feiner als die Partition $\Gamma_{N+K,\beta}$. Aus der Konkavität der Informationsfunktion folgt:

$$G_{N+K}(\beta, p) = H_{b_p}(\Sigma_{N+K}, \Gamma_{N+K,\beta}) \leq H_{b_p}(\Sigma_{N+K}, \bar{\Gamma})$$

und insgesammt:

$$G_{N+K}(\beta,p) \leq G_N(\beta,p) + G_K(\beta,p)$$

Das Lemma über subadditive Folgen (vgl. [Wa,4.9.]) impliziert die Behauptung.

(2) Sei $\beta \in (0.5,1)$ und $\alpha := \beta^{-1} \in PV$. Die Konjugierten von α bezeichnen wir mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.
$x_1, x_2 \ldots x_{j(N)}$ seien die verschiedenen Punkte der Form $\sum_{k=0}^{N-1} \pm(1-\beta)\beta^k$. $m_1, m_2 \ldots m_{j(N)}$ seien die $b_{0.5}$ Maße der korrespondierenden Elemente der Partition $\Gamma_{N,\beta}$ von Σ_N. Hiermit gilt:

$$G_N(\beta, 0.5) = -\sum_{i=1}^{j(N)} m_i \log m_i$$

Wir zeigen zunächst $j(N) \leq c\alpha^{N-1}$ für eine nur von β abhängige Konstante c. x und $x^{'}$ seien zwei verschiedene x_i. Offensichtlich gilt

$$x - x^{'} = 2(1-\beta)\beta^{N-1}P(\alpha)$$

wobei P ein (vom Nullpoynom verschiedenes) Polynome mit Koeffizienten aus $\{-1,0,1\}$ ist.
Da $|P(\alpha)P(\alpha_1)\ldots P(\alpha_s)| \geq 1$, erhalten wir mit $|\alpha_i| < 1$:

$$|P(\alpha)| \geq \frac{1}{|P(\alpha_1)P(\alpha_2)\ldots P(\alpha_s)|} \geq \prod_{i=1}^{s}(1-|\alpha_i|) =: \hat{c}$$

für jedes (vom Nullpolynom verschiedenes) Polynom P mit mit Koeffizienten aus $\{-1,0,1\}$. Damit folgt:

$$|x - x^{'}| \geq \bar{c}\beta^{N-1} \Rightarrow j(N) \leq c\alpha^{N-1}, \text{ wobei } \bar{c} := 2(1-\beta)\hat{c} \text{ und } c := 2\bar{c}^{-1} + 1$$

Aus der Singularität von ν_β nach 4.1.1. erhalten wir:
$\exists \bar{\kappa} > 0\ \forall \epsilon > 0\ \exists$ disjunkte Intervalle $(a_1, b_1), \ldots, (a_u, b_u)$ mit

$$\sum_{l=1}^{u}(b_l - a_l) < \epsilon \quad \text{und} \quad \nu_\beta(O) > \bar{\kappa} \quad \text{wobei} \quad O = \bigcup_{l=0}^{u}(a_l, b_l)$$

$$\nu_N(O) := \sum_{i:x_i \in O} m_i = \sharp\{\sum_{k=0}^{N-1} \pm(1-\beta)\beta^k \in O\} 2^{-N}$$

Wie in 4.1. gesagt, konvergiert $\nu_N(O)$ gegen $\nu_\beta(O)$, so daß:

$$\exists N_1 \quad \forall N > N_1 \ : \ \nu_N(O) > \bar{\kappa}$$

Wir schnüren nun die Intevalle (a_l, b_l) durch Vielfache des minimalen Abstandes zweier x_i ein.

$$k_{l,N} := max\{k \mid k\bar{c}\beta^{N-1} \leq a_l\} \quad a_{l,N} := k_{l,N}\bar{c}\beta^{N-1}$$

$$\bar{k}_{l,N} := min\{k \mid b_l \leq k\bar{c}\beta^{N-1}\} \quad b_{l,N} := \bar{k}_{l,N}\bar{c}\beta^{N-1}$$

Mit dieser Definition ergibt sich:
$\exists N_2 > N_1 \quad \forall N > N_2 : \quad (a_{l,N}, b_{l,N})$ disjunkt für alle $l = 1 \ldots u$, sowie

$$\sum_{l=1}^{u}(b_{l,N} - a_{l,N}) < \epsilon \quad \text{und} \quad \nu_N(\bar{O}) > \bar{\kappa} \quad \text{wobei} \quad \bar{O} = \bigcup_{l=0}^{u}(a_{l,N}, b_{l,N})$$

$$\Rightarrow \bar{c}\beta^{N-1}\sum_{l=1}^{u}(\bar{k}_{l,N} - k_{l,N}) < \epsilon$$

$\bar{j}(N)$ sei die Anzahl der verschiedenen Punkte x_i in $\bar{O}$. Da sich in einem Intervall $(a_{l,N}, b_{l,N})$ höchstens $\bar{k}_{l,N} - k_{l,N}$ Punkte x_i befinden folgt:

$$\bar{c}\beta^{N-1}\bar{j}(N) < \epsilon \Rightarrow \bar{j}(N) < \epsilon\bar{c}^{-1}\alpha^{N-1} \leq \epsilon c\alpha^{N-1}$$

Durch Ordnung der x_i und korrespondierenden m_i nach $x_i \in \bar{O}$ und $x_i \notin \bar{O}$ ergibt sich:

$$G_N(\beta, 0.5) = -\sum_{i=1}^{\bar{j}(N)} m_i \log m_i - \sum_{i=\bar{j}(N)+1}^{j(N)} m_i \log m_i \quad \text{mit} \quad \kappa(N) := \sum_{i=1}^{\bar{j}(N)} m_i \geq \bar{\kappa}$$

Schätzt man nun beide Summen durch das Maximun der Informationsfunktion unter der ensprechenden Nebenbedingung ab, erhält man:

$$G_N(\beta, 0.5) \leq \kappa(N)\log\frac{\bar{j}(N)}{\kappa(N)} + (1-\kappa(N))\log\frac{j(N) - \bar{j}(N)}{1-\kappa(N)}$$

$$\leq \kappa(N)\log\bar{j}(N) + (1-\kappa(N))\log j(N) + \log 2$$

Mit den Abschätzungen für $j(N), \bar{j}(N)$ und $\kappa(N)$ folgt:

$$G_N(\beta, 0.5) \leq (N-1)\log\alpha + \bar{\kappa}\log\epsilon + \log 2 + \log c \quad \forall N > N_2$$

Die Konstanten $\bar{\kappa}$ und c sind unabhängig von ϵ, so daß für ϵ hinreichend klein und $N > N_2(\epsilon)$ die Formel $G_N(\beta, 0.5) < N\log\alpha$ gilt.
Sei nun ein N mit $G_N(\beta, 0.5) < N\log\alpha$ fest gewählt.
Für alle $A \in \Gamma_{N,\beta}$ gilt $\lim_{p\longrightarrow 0.5} b_p(A) = b_{0.5}(A)$. Mit der Stetigkeit der Informationsfunktion folgt $\lim_{p\longrightarrow 0.5} G_N(\beta, p) = G_N(\beta, 0.5)$, und so:

$$\lim_{p\longrightarrow 0.5} \frac{G_N(\beta, p)}{N} = \frac{G_N(\beta, 0.5)}{N} < \log\alpha$$

Nach der Definition der Garsia Entropie gilt $G(\beta, p) \leq G_N(\beta, p)/N \; \forall p$, sodaß die Behauptung folgt.

$\square$

Garsia leitet in [GA1] ausserdem aus einem allgemeineren Satz ab, daß $G(\beta, 0.5) < \log\beta^{-1}$ hinreichend für die Singularität des Maßes ν_β ist. Es ist jedoch unkar, ob diese Bedingung für Werte von $\beta \in (0.5, 1)$ ausser den Reziproken von PV-Zahlen gilt.

4.4. Dimension

Alexander und Yorke beweisen in [AY,6] einen Zusammenhang zwischen der Rényi Dimension der Maße ν_β und der im letzten Abschnitt diskutierten Garsia Entropie. Wie im letzen Abschnitt wird hier auf $\nu_{\beta,p}$ verallgemeinert.

Satz 4.4.1.

Für $\beta \in (0.5, 1)$ und $p \in [0, 1]$ gilt:

$$\overline{dim_R}\ \nu_{\beta,p} \leq \frac{G(\beta, p)}{\log\beta^{-1}}$$

Beweis:

Der im folgenden geführte Beweis ist weitgehend analog zum Beweis von Alexander und Yorke.
β und p seien wie oben fest gewählt. Zur Abkürzung setzen wir $\nu = \nu_{\beta,p}$, $\mu = \mu_{\beta,p}$ sowie $b = \bar{b}_p$ und $G_N = G_N(\beta, p)$.
Wesentlich für den Beweis ist die Selbstaffinität des unendlich gefalteten Bernoulli Maßes ν, mit der hier begonnen wird:

$$T^*\nu(B) := p\ \nu(f_1^{-1}(B)) + (1-p)\nu(f_2^{-1}(B)) \quad (*)$$

wobei $f_1(x) = \beta x + (1-\beta)$ und $f_2(x) = \beta x - (1-\beta)$
Wir schließen $T^*\nu = \nu$ aus der f-Invarianz des Maßes μ und 4.1.3. :
$\nu(B) = \mu(B \times I) = \mu(f^{-1}(B \times I)) = \mu(f_1^{-1}(B) \times [0,1] \dot{\cup} f_2^{-1}(B) \times [-1,0))$
$= \mu(f_1^{-1}(B) \times [0,1]) + \mu(f_2^{-1}(B) \times [-1,0)) =$
$\nu(f_1^{-1}(B))b([0,1]) + \nu(f_2^{-1}(B))b([-1,0)) = p\nu(f_1^{-1}(B)) + (1-p)\nu(f_2^{-1}(B))$
$= T^*\nu(B) \quad \forall B \in B(I)$

Für ein Maß $\bar{\nu}$ auf I bezeichne $J(\bar{\nu})$ den Träger des Maßes und $|\bar{\nu}| := \bar{\nu}(J(\bar{\nu}))$ die gesamte Masse.
Nach (*) ist $T^*\nu$ die Summe von Maßen ν_+ und ν_- mit $J(\nu_{+/-}) = \beta I \pm (1-\beta)$ und $|\nu_+| = p$ und $|\nu_-| = (1-p)$.
Induktiv sieht man, daß $(T^*)^N\nu$ die Summe von 2^N Maßen $\nu_i \;\; i = 1 \dots 2^N$ ist, für die gilt:

$$J(\nu_i) = \beta^n I + \sum_{k=0}^{N-1} s_k(i)(1-\beta)\beta^k \quad und \quad |\nu_i| = b(s(i))$$

wobei $s(i) = (s_0(i), \dots, s_{N-1}(i))$ alle Tupel aus Σ_N durchläuft und b hier das endliche Produktmaß mit den Gewichten $p, (1-p)$ ist.

Wir fassen nun die ν_i mit gleichem Träger zusammen und bezeichnen die resultierenden Maße nit $\bar{\nu}_i$ für $i = 1 \dots j(N)$. $J(\nu_i)$ ist gleich $J(\nu_l)$ genau dann, wenn $s(i) \sim s(l)$ gilt, wobei $\sim$ die in 4.3. definierte Äquivalenzrelation (zu dem festen Wert β) ist. Damit existiert für alle A aus der Partition Γ_N ein $i \in \{1 \dots j(N)\}$, so daß $|\bar{\nu}_i| = b(A)$ und daher gilt:

$$G_N = \sum_{i=1}^{j(N)} |\bar{\nu}_i| \log |\bar{\nu}_i|$$

Die Intervalle $J(\bar{\nu}_i)$ können überlappen. Wir definieren Maße ξ_i durch "Abschneiden" dieser Überlappungen:

$$\xi_i(B) := (\bar{\nu}_i + \bar{\nu}j)(B \cap J(\bar{\nu}_i))$$

$$\xi_j(B) := (\bar{\nu}_j(B \backslash J(\bar{\nu}_i))$$

falls $J(\bar{\nu}_i) \cap J(\bar{\nu}_j) \neq \emptyset$ und $|\bar{\nu}_i| \geq |\bar{\nu}_j|$
Offensichtlich gilt $\bar{\nu}_i + \bar{\nu}_j = \xi_i + \xi_j$ und $J(\xi_i) \cap J(\xi_j) = \emptyset$, aber weiterhin erhalten wir auch:
$|\xi_i| = (\bar{\nu}_i + \bar{\nu}_j)(J(\bar{\nu}_i) \geq |\bar{\nu}_i| \geq |\bar{\nu}_j|$ und $|\xi_j| = \bar{\nu}_j(J(\bar{\nu}_j) \backslash J(\bar{\nu}_i)) \leq |\bar{\nu}_j| \leq |\bar{\nu}_i|$
$\Rightarrow \; -(|\xi_i| \log(|\xi_i|) + (|\xi_j| \log(|\xi_j|) \leq -(|\bar{\nu}_i| \log(|\bar{\nu}_i| + |\bar{\nu}_j| \log(|\bar{\nu}_j|)$
Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man Maße $\xi_i \quad i = 1 \dots j(N)$, die folgendes erfüllen:

$$\nu = (T^*)^N \nu = \sum_{i=1}^{j(N)} \bar{\nu}_i = \sum_{i=1}^{j(N)} \xi_i$$

$$-\sum_{i=1}^{j(N)} |\xi_i| \log |\xi_i| \leq -\sum_{i=1}^{j(N)} |\bar{\nu}_i| \log |\bar{\nu}_i| = G_N$$

Da $J(\xi_i) \cap J(\xi_j) = \emptyset$, ist $\wp = \{J(\xi_i) | i = 1 \dots j(N)\}$ eine Partition von I. Es gilt: $diam(J(\xi_i)) \leq diam(J(\bar{\nu}_i)) = 2\beta^N \Rightarrow diam \; \wp \leq 2\beta^N$.
Da $\nu(J(\xi_i)) = \xi_i(J(\xi_i)) = |\xi_i|$ gilt, $H_\nu(\wp) \leq G_N$ und mit Definition 2.3.3 $h_\nu(2\beta^N) \leq G_N$. Hieraus folgt:

$$\overline{dim_R} \; \nu = \overline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{h_\nu(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}} = \overline{\lim}_{N \longrightarrow \infty} \frac{h_\nu(2\beta^N)}{\log 2 + N \log \beta^{-1}}$$

$$\leq \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{G_N}{N \log \beta^{-1}} = \frac{G(\beta, p)}{\log \beta^{-1}}$$

$\square$

Wir leiten im weiteren aus der Abschätzung der Rényi Dimension von $\nu_{\beta,p}$ eine Abschätzung der Hausdorff Dimension von $\nu_{\beta,p}$ und von $\mu_{\beta,p}$ her.

Satz 4.4.2.

Für $\beta \in (0.5, 1)$ und $p \in [0, 1]$ gilt:

$$dim_H\ \nu_{\beta,p} \leq \frac{G(\beta,p)}{\log \beta^{-1}} \qquad \text{und}$$

$$dim_H\ \mu_{\beta,p} \leq \frac{G(\beta,p)}{\log \beta^{-1}} + \frac{h_{\bar{b}_p}(\bar{\sigma})}{\log 2}$$

Beweis:

β und p seien fest gewählt. Setze $\bar{b} = \bar{b}_p$, $\nu := \nu_{\beta,p}$, $\mu := \mu_{\beta,p}$ und $c_1 := \frac{G(\beta,p)}{\log \beta^{-1}}$ sowie $c_2 := \frac{h_{\bar{b}_p}(\bar{\sigma})}{\log 2}$.
Aus 4.4.1. erhalten wir mit der Kontraposition von 2.3.8.:
$\exists X \subseteq I$ mit $\nu(X) > 0$ und $\underline{d(x,\nu)} \leq c_1 \quad \forall x \in X$
Nach [LY,1.A.,4.5.] gilt für das auf I definierte Bernoulli Maß $\bar{b}$:
$\exists Y \subseteq I$ mit $\bar{b}(Y) = 1$ und $\underline{d(y,\bar{b})} = \overline{d(y,\bar{b})} = c_2 \quad \forall y \in Y$
Beachtet man das $\mu = \nu \times \bar{b}$, folgt hieraus:

$$\underline{d((x,y),\mu)} = \underline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log \mu(B((x,y),\epsilon))}{\log \epsilon}$$

$$= \underline{\lim}_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log \nu(B(x,\epsilon))}{\log \epsilon} + \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log \bar{b}(B(y,\epsilon))}{\log \epsilon} \leq c_1 + c_2 \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

und $\mu(X \times Y) > 0$. Aus der Abschätzung der lokalen Dimension auf einer Menge von positivem Maß lässt sich unter Verwendung der Ergodizität von μ die Abschätzung fast überall gewinnen.
Sei $M := (-1, 1] \times \{-1\}$ und $\bar{x} \in Q\backslash M$ sowie $\bar{y} \in f^{-1}(\bar{x})$. $\bar{y}$ ist nicht in der Singularität S enthalten, so daß für ϵ_0 hinreichend klein und $\epsilon < \epsilon_0$ $B(\bar{y}, 0.5\epsilon) \cap S = \emptyset$ und daher $f(B(\bar{y}, 0.5\epsilon)) \subseteq B(\bar{x}, \epsilon)$. Mit der Invarianz von μ folgt $\mu(B(\bar{y}, 0.5\epsilon)) \leq \mu(B(\bar{x}, \epsilon))$ und damit $\underline{d(\bar{y},\mu)} \leq \underline{d(\bar{x},\mu)}$.
Aus diesen Überlegungenen ergibt sich unter Verwendung von $f^{-1}(Q\backslash M) \subseteq Q\backslash M$:

$$\underline{d(\bar{x},\mu)} \leq c_1 + c_2 \quad \forall \bar{x} \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}((X \times Y)\backslash M) =: E$$

Aus $M \subseteq f^{-n}((-1, -1 + 2\beta^n])$ erkennen wir $\mu(M) = 0$ und so $\mu(E) > 0$. Offenbar gilt $f^{-1}(E) \subseteq E$. Definiere $\bar{E} = \cap_{n \geq 0} f^{-k}(E) \subseteq E$.

Aus $\mu(E) > 0$ folgt mit der Invariantz von μ sofort $\mu(\bar{E}) > 0$. Da aber $f^{-1}(\bar{E}) = \bar{E}$ und μ f-ergodisch ist, wird sogar $\mu(\bar{E}) = 1$ impliziert, so daß $\underline{d(\bar{x}, \mu)} \leq c_1 + c_2$ μ-fast überall gilt.
Weiterhin folgt $\nu(pr_X(\bar{E})) = 1$ und, da die lokale Dimension von $\bar{b}$ fast überall c_2 ist, $\underline{d(x, \nu)} \leq c_1$ $\forall x \in pr_X\bar{E}$.
Mit 2.3.7. folgen aus den Abschätzungen der unteren lokalen Dimension fast überall die behaupteten Abschätzungen der Hausdorff Dimensionen.

$\square$

Wir erinnern hier daran, daß die Grösse $h_{\bar{b}_p}(\bar{\sigma})$ im vorigen Satz explizit durch $-(p \log p + (1-p) \log(1-p))$ gegeben ist.

Der Satz letzte ist insbesondere für $\beta^{-1} \in PV$ interessant, da sich in diesem Fall zusammen mit 4.3.1. ergibt, daß die Hausdorff Dimension $\nu_{\beta,p}$ für p hinreichend nahe bei 0.5 echt kleiner als eins, und die Hausdorff Dimension $\mu_{\beta,p}$ echt kleiner als zwei wird.
Es sei noch angemerkt, daß, falls β und p so gewählt sind, daß $\nu_{\beta,p}$ absolut stetig ist, mit Satz 2.3.10 folgt, daß die Dimension von $\nu_{\beta,p}$ für alle Dimensionsbegriffe eins ist. Speziell ist dies nach 4.1.2. bei ν_β für Lebesgue-fast alle $\beta \in (0.5, 1)$ der Fall. Die Dimension von $\nu_\beta \times \ell$ ist unter der gleichen Voraussetzung zwei, wie sich auch wieder aus 2.3.10. folgern lässt.
Zu einer Zusammenfassung und Interpretation dieser Ergebnisse hinsichtlich des Variationsprinzips verweisen wir auf den letzten Abschnitt der Arbeit.

Zum Abschluß dieses Abschnitts seien noch zwei Arbeiten zur Dimension unendlich gefalteter Bernoulli Maße erwähnt.
Ledrappier und Porzio behaupten in [LP] mit Verweis auf [LY] die Existenz und Konstanz der lokalen Dimension von ν_β fast überall und leiten eine explizite, jedoch sehr komplexe Formel, für $dim\nu_\beta$ im Spezialfall β gleich dem goldenen Schnitt, ab.
Weiter liegt ein Satz von Tian-You Hu aus [TH] vor, der obere und untere Abschätzungen für die lokale Dimension von ν_β für alle $x \in I$ in einem Spezialfall bietet.

Satz 4.3.3. [Tian-You Hu]

Sei $\beta \in (0.5, 1)$ und $\beta^s + \beta^{s-1} + \ldots + \beta - 1 = 0$
g sei der goldene Schnitt $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\alpha_* := \frac{\log g}{s \log \beta^{-1}} + \frac{\log 2}{log \beta^{-1}}$, $\alpha^* := \frac{\log 2}{\log \beta^{-1}}$ dann gilt:
(1) $\alpha_* \leq d(\nu_\beta, x) \leq \alpha^* \quad \forall x \in I$
(2) $\{x | d(\nu_\beta, x) = \alpha\}$ liegt dicht in $I \quad \forall \alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$

Die Methode von Tian-You Hu besteht darin, zu einem $x = \sum_{i=0}^{\infty} s_i (1-\beta)\beta^i$ die Wachstumsrate von $\sharp\{(s_i') \in \Sigma_N | \sum_{i=0}^{N-1} s_i'(1-\beta)\beta^i = \sum_{i=0}^{N-1} s_i(1-\beta)\beta^i\}$ mittels der durch die Definition von β gegebenen kombinatorischen Struktur abzuschätzen.

5. Der Lift der Fat Baker's Transformation

In diesem Abschnitt wird der Lift der Fat Baker's Transformation, eine dreidimensionale injektive Abbildung, deren Projektion die Fat Baker's Transformation ist, betrachtet. Der "Lift" wird hier zum einen aus unabhängigem Interesse analysiert, zum anderen ergeben sich allerdings auch Folgerungen für das projizierte System.
Nach einer Diskussion des Attraktors des "Lifts" und seiner Dimension wird wie in Abschnitt 2 ein Zusammenhang zur Shift-Dynamik und die Beschreibung invarianter Maße mittels diesem angegeben. Daraufhin definieren wir bedingte Maße auf stabilen und unstabilen Faserungen und wenden die von Ledrappier und Young in [LY] entwickelte Theorie an, um Aussagen über verschiedene Dimensionszusammenhänge zu erhalten. Im Anschluß wird dann die Hausdorff Dimension "Lift"-ergodischer Maße und die Hausdorff Dimension ergodischer Maße der Fat Baker's Transformation abgeschätzt, wobei sich viele vorangegangene Sätze als wertvoll erweisen.

5.1. Der "Lift" und sein Attraktor

Wir definieren den "Lift" der Fat Baker's Transformation, indem wir die beiden sich überlappenden Bilder der oberen bzw. unteren Hälfte des Quadrats bei der zweidimensionalen Abbildung im Dreidimensionalen trennen:

$$g_{\beta,\tau}: \qquad \mathbf{R} \times I \times \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R} \times I \times \mathbf{R}$$

$$g_{\beta,\tau}(x,y,z) = \begin{cases} (\beta x + (1-\beta), 2y-1, \tau z + (1-\tau)) & f\ddot{u}r \quad y \geq 0 \\ (\beta x - (1-\beta), 2y+1, \tau z - (1-\tau)) & f\ddot{u}r \quad y < 0 \end{cases}$$

$$\text{wobei} \quad \beta \in (0.5, 1) \quad \text{und} \quad \tau \in (0, 0.5)$$

$g_{\beta,\tau}$ ist offenbar stückweise linear mit der (x,z)-Ebene als Singularität. Weiterhin sieht man sofort, daß die Projektion pr_{XY} des "Lifts" auf die (x,y)-Ebene genau die Fat Baker's Transformation ist:

$$pr_{XY} \circ g_{\beta,\tau} = f_\beta \quad \forall \tau \in (0, 0.5)$$

Wie in 3.1.1. sieht man, daß der Quader $\hat{Q} := I^3$ (vorwärts) invariant unter $g_{\beta,\tau}$ ist und eine global anziehende Menge darstellt. Ähnlich wie dort betrachten wir die Einschränkung von $g_{\beta,\tau}$ auf $\hat{Q}$.

Die eine Hälfte von $\hat{Q}$, $\hat{H}_{+1} := I \times [0,1] \times I$, wird durch $g_{\beta,\tau}$ linear auf den Quader $g_{\beta,\tau}(\hat{H}_{+1}) = [1-2\beta, 1] \times I \times [1-2\tau, 1]$ abgebildet, und die andere Hälfte $\hat{H}_{-1} := I \times [-1,0) \times I$ wird linear auf den Quader $g_{\beta,\tau}(\hat{H}_{-1}) = [-1,-1+2\beta] \times [-1,1) \times [-1,-1+2\tau]$ abgebildet. Wir veranschaulichen dies durch nachstehendes Bild.

Der Schnitt von $g_{\beta,\tau}(\hat{H}_{-1})$ mit $g_{\beta,\tau}(\hat{H}_{+1})$ ist leer, und $g_{\beta,\tau}$ eingeschränkt auf $\hat{Q}$ somit injektiv. Die Umkehrfunktion $g_{\beta,\tau}^{-1}$ existiert auf $g_{\beta,\tau}(\hat{Q})$. Weiterhin ergibt sich, daß $g_{\beta,\tau}$ auf der Menge

$$\Omega_{\beta,\tau} := \bigcap_{n=0}^{\infty} g_{\beta,\tau}^{n}(\hat{Q})$$

bijektiv ist.
Wir betrachten nun den Attraktor des "Lifts" $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau} := \overline{\Omega_{\beta,\tau}}$.
Der Attraktor lässt sich mittels eines iterierten Funktionensystems (kurz IFS) beschreiben. Für festes $\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$ setze hierzu:

$$g_{+1}(x,y,z) = (\beta x + (1-\beta), y, \tau z + (1-\tau))$$

$$g_{-1}(x,y,z) = (\beta x - (1-\beta), y, \tau z - (1-\tau))$$

$$\hat{Q}_{(s_k)} = g_{s_0} \circ \ldots \circ g_{s_{n-1}}(\hat{Q}) \text{ für } (s_k) \in \Sigma_n$$

$$\hat{\Lambda}_n(\beta,\tau) = \bigcup_{(s_k)\in\Sigma_n} \hat{Q}_{(s_k)} \quad \hat{\Lambda}(\beta,\tau) = \bigcap_{n\geq 1} \hat{\Lambda}_n(\beta,\tau)$$

Offensichtlich sind die Mengen $\hat{Q}_{s_k}, \hat{\Lambda}_n(\beta,\tau)$ und $\hat{\Lambda}(\beta,\tau)$ jeweils Produkte des Intervalls I in y-Richtung mit Mengen $Q_{s_k}, \Lambda_n(\beta,\tau), \Lambda(\beta,\tau)$ in der (x,z)-Ebene, die sich durch Einschränkung des IFS auf diese Ebene ergeben. Bei $\hat{Q}_{(s_k)}$ handelt es sich um achsenparallele, disjunkte Quader der Kantenlängen

$(2\beta^n, 2, 2\tau^n)$ in $\hat{Q}$. $\hat{\Lambda}(\beta,\tau)$ wird als Attraktor des IFS $(\hat{Q}, g_{+1}, g_{-1})$ bezeichnet. Nach dem Satz von Hutchinson (vgl. [HU]) ist $\hat{\Lambda}(\beta,\tau)$ die eindeutig bestimmte kompakte Teimenge von $\hat{Q}$, die der Selbstaffinität

$$\hat{\Lambda}(\beta,\tau) = g_{+1}(\hat{\Lambda}(\beta,\tau)) \cup g_{-1}(\hat{\Lambda}(\beta,\tau))$$

genügt. Wir zeigen, daß der Attraktor des "Lifts" mit dem Attraktor des IFS übereinstimmt und (vorwärts) invariant ist und bestimmen den Zusammenhang zwischwen $\Omega_{\beta,\tau}$ und dem (abgeschlossenen) Attraktor.

Lemma 5.1.1.

$S_+ := I \times \{1\} \times I$ bezeichne die Seite des Würfels $\hat{Q}$ mit $y = 1$.
(1) $g^n_{\beta,\tau}(\hat{Q}) = (\hat{\Lambda}_n(\beta,\tau) \backslash S_+) \cup [1-2\beta^n, 1] \times 1 \times [1-2\tau^n, 1]$
(2) $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau} = \hat{\Lambda}(\beta,\tau)$
(3) $\Omega_{\beta,\tau} = (\hat{\Lambda}_{\beta,\tau} \backslash S_+) \cup \{(1,1,1)\}$
(4) $g_{\beta,\tau}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}) \subseteq \hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$

Beweis:

(1) Wir kürzen $g_{\beta,\tau}$ durch g ab.
Es gilt $g(\hat{Q}) = \hat{Q}_{+1} \cup (\hat{Q}_{-1} \backslash S_+)$, und $g(\hat{Q}_{(s_k)}) = g(H_{+1} \cap \hat{Q}_{(s_k)}) \cup g(H_{-1} \cap \hat{Q}_{(s_k)})$
$= \hat{Q}_{(1,s_0,\ldots,s_{n-1})} \cup (\hat{Q}_{(-1,s_0,\ldots,s_{n-1})} \backslash S_+) \quad \forall (s_k) \in \Sigma_n$
Hieraus folgt (1) wenn man beachtet, daß der Rand von $\hat{Q}_{(1,\ldots,1)}$ für $y = 1$ gerade $[1-2\beta^n, 1] \times \{1\} \times [1-2\tau^n, 1]$ ist und in $g^n(\hat{Q})$ enthalten bleibt.

(2) Aus (1) folgt $\overline{g^n(\hat{Q})} = \hat{\Lambda}_n(\beta,\tau)$, und damit die Behauptung.

(3) folgt aus (1) mit dem Schnitt über $n \in \mathbf{N}$.

(4) $g(\overline{g^n(\hat{Q})}) = g(\hat{\Lambda}_n(\beta,\tau)) \subseteq \hat{\Lambda}_{n+1}(\beta,\tau) = \overline{g^{n+1}(\hat{Q})} \Rightarrow g(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}) \subseteq \hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$

□

Es stellt sich nun die Frage nach der Dimension des Attraktors $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$ bzw. nach der Dimension der (x,z)-Schnitte $\Lambda(\beta,\tau)$ des Attraktors.

Satz 5.1.2.

Für alle $\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$ gilt:

$$1 \leq dim_H \Lambda(\beta, \tau) \leq dim_B \Lambda(\beta, \tau) = \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)}$$

$$2 \leq dim_H \hat{\Lambda}_{\beta,\tau} \leq dim_B \hat{\Lambda}_{\beta,\tau} = \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)} + 1$$

Beweis:

Wir berechnen zunächst $dim_B \Lambda(\beta, \tau)$ für $\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$.
$N(\epsilon)$ sei die kleinste Anzahl von Quadraten der Kantenlänge ϵ, die gebraucht werden, um $dim_B \Lambda(\beta, \tau)$ zu überdecken.
$\Lambda_n(\beta, \tau)$ besteht aus 2^n disjunkten Rechtecken $Q_{(s_k)}$, für $(s_k) \in \Sigma_n$, der Kantenlängen $(2\beta^n, 2\tau^n)$. Wir überdecken diese durch aneinandergereihte , gerade berührende Quadrate der Kantenlänge $2\tau^n$ und bezeichnen die resultierende Überdeckung von $\Lambda_n(\beta, \tau)$ mit $\Gamma(n)$. Die Überdeckung eines einzelnen Rechtecks $Q_{(s_k)}$ benötigt $[\beta^n/\tau^n]$ Quadrate der Kantenlänge τ^n, damit gilt

$$|\Gamma(n)| = 2^n [\frac{\beta^n}{\tau^n}] \quad \Rightarrow \quad N(\tau^n) \leq 2^n [\frac{\beta^n}{\tau^n}]$$

Die Implikation gilt, da $\Lambda(\beta, \tau) \subseteq \Lambda_n(\beta, \tau)$, und somit $\Gamma(n)$ auch $\Lambda(\beta, \tau)$ überdeckt.
Sei $\bar{\Gamma}(n)$ nun eine beliebige andere Überdeckung von $\Lambda(\beta.\tau)$ durch Quadrate der Kantenlänge $2\tau^n$. Da $pr_X(Q_{s_k}) = pr_X(Q_{(s_k)} \cap \Lambda(\beta, \tau))$, ist der Schnitt von jedem Element aus $\Gamma(n)$ mit $\Lambda(\beta, \tau)$ nicht leer. Daher muß jedes Quadrat aus $\Gamma(n)$ durch eine Quadrat aus $\bar{\Gamma}(n)$ geschnitten werden. Ein Quadrat aus $\bar{\Gamma}(n)$ kann aber nicht mehr als 9 Quadrate aus $\Gamma(n)$ schneiden, da diese sich, wenn überhaupt, nur in den Rändern berühren. Damit gilt:

$$|\bar{\Gamma}(n)| \geq \frac{1}{9} 2^n [\frac{\beta^n}{\tau^n}] \quad \Rightarrow \quad N(\tau^n) \geq \frac{1}{9} 2^n [\frac{\beta^n}{\tau^n}]$$

Die Implikation ergibt sich durch die beliebige Wahl von $\bar{\Gamma}(n)$. Insgesamt folgt also:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} -\frac{\log N(\tau^n)}{\log \tau^n} = \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)}$$

Nach [Fa,3.1.] kann zur Bestimmung der Box-Counting Dimension in R^2 die minimale Anzahl von ϵ-Kugeln ersetzt werden durch die minimale Anzahl von Quadraten deren Kantenlänge eine geometrische Folge durchläuft, so daß unsere Behauptung über $\dim_B \Lambda(\beta,\tau)$ folgt.
Aus 2.3.5.(3) folgt die Behauptung über $\dim_B \hat{\Lambda}(\beta,\tau)$. Die Abschätzung der Hausdorff Dimension durch die Box-Counting Dimension gilt wie in 2.3.4. gesagt immer, und die unteren Abschätzungen gelten nach 2.3.5.(1), da mit $\beta > 0.5$ offenbar $pr_X(\hat{\Lambda}(\beta,\tau)) = I$ und $pr_{XY}(\Lambda(\beta,\tau)) = Q$ gilt.

$\square$

Pollicott und Weiss finden in [PW] eine hinreichende Bedingung an $\beta \in (0.5,1)$ für die Übereinstimmung von Box-Counting und Hausdorff Dimension im vorliegenden Fall, die wir hier angeben:

$$\exists C > 0 \;\; \forall x \in (-1,1) : \sharp\{\sum_{k=0}^{n-1} \pm(1-\beta)\beta^k \in [x, x+\beta^n)\} \leq C(2\beta)^n$$

Die Bedingung ist erfüllt, falls ν_β absolut stetig ist (vgl. [PW,A3]), jedoch verletzt, falls $\beta^{-1} \in PV$, wie man mit Hilfe der Überlegungen in 4.3. zeigen kann.

Es ist in diesem Zusammenhang inetressant anzumerken, daß der (x,z)-Schnitt des Attraktors $\Lambda(\beta,\tau)$ im Fall $\tau = 0.5$, abgesehen von $y \in I$ mit nicht einndeutiger signierter dyadadischer Entwicklung (für die man zwei x-Werte erhält), der Graph $\{(R_\beta(y), y) | y \in I\}$ der Funktion R_β ist, wobei

$$R_\beta(y) := \sum_{k=0}^{\infty} (y)_{k+1}(1-\beta)\beta^k \quad \text{für} \quad y \in I$$

$(y)_k$ ist hier wieder die k-te Ziffer der signierten dyadischen Entwicklung. Przytycki und Urbanski untersuchen in [PU] die Funktion R_β und beweisen in [PU,6] insbesondere, daß die Hausdorff Dimension, des Graphen von R_β (und damit auch die Hausdorff Dimension von $\Lambda(\beta, 0.5)$) für $\beta \in PV$ echt kleiner als $2 - \log\beta/\log 2$ (der Box-Counting Dimension von $\Lambda(\beta, 0.5)$) wird.

5.2. Zusammenhang zum Shift und invariante Maße

$\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$ seien im folgenden fest gewählt, so daß auf die Indizierung bei $g_{\beta,\tau}$, $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$ und $\Lambda(\beta, \tau)$ verzichtet werden kann.

Wir codieren die Punkte aus $\hat{\Lambda}$ durch folgende Abbildung:

$$\hat{\pi}: \quad \Sigma \longrightarrow \hat{\Lambda} \quad mit \quad \hat{\pi}((s_k)) = (\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, \sum_{k=1}^{\infty} s_{-k}2^{-k}, \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\tau)\tau^k)$$

Satz 5.2.1.

(1) $\hat{\pi}$ ist wohldefiniert, stetig und surjektiv. Die Einschränkung von $\hat{\pi}$ auf $\bar{\Sigma}$ ist bijektiv.
(2) $\hat{\pi} \circ \sigma((s_k)) = g \circ \hat{\pi}((s_k)) \quad \forall (s_k) \in \bar{\Sigma}$

Beweis:

(1) Wir zeigen hier, daß die Abbildung

$$\hat{\pi}^+: \quad \Sigma^+ \longrightarrow \Lambda \quad \text{mit} \quad \hat{\pi}^+((s_k)) = (\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\tau)\tau^k)$$

wohldefiniert, stetig und bijektiv ist.
h_{+1}, h_{-1} seien die Einschränkungen der im letzten Abschnitt definierten Abbildungen g_{+1}, g_{-1} auf die (x, z)-Ebene. Für den (x, z)-Schnitt des Attraktors des "Lifts" Λ gilt:

$$\Lambda = \{\bigcap_{n\geq 1} h_{s_0} \circ \ldots \circ h_{s_{n-1}}(Q) | (s_k) \in \Sigma^+\}$$

Induktiv erhält man:

$$h_{s_0} \circ \ldots \circ h_{s_{n-1}}(Q) = [-\beta^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k(1-\beta)\beta^k, \beta^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k(1-\beta)\beta^k] \times$$

$$[-\tau^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k(1-\tau)\tau^k, \tau^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k(1-\tau)\tau^k] \Rightarrow \hat{\pi}^+((s_k)) = \bigcap_{n\geq 1} h_{s_0} \circ \ldots \circ h_{s_{n-1}}(Q)$$

$$\Rightarrow \hat{\pi}^+ \text{ ist wohldefiniert und surjektiv nach } \Lambda$$

$$(s_k) \neq (s_k^{'}) \Rightarrow \quad \exists \;\; n > 0 \;\; h_{s_0} \circ \ldots \circ h_{s_{n-1}}(Q) \neq h_{s_0^{'}} \circ \ldots \circ h_{s_{n-1}^{'}}(Q)$$
$$\Rightarrow \hat{\pi}^+((s_k)) \neq \hat{\pi}^+((s_k^{'})) \Rightarrow \hat{\pi}^+ \text{ ist injektiv.}$$

Die Stetigkeit von $\hat{\pi}^+$ folgt aus der Stetigkeit der Komponenten, die nach 3.2.1.(2) gilt.

Aus der Aussage über $\hat{\pi}^+$ folgt mit den in 3.2. diskutierten Eigenschaften von π^- die Behauptung über $\hat{\pi}$.

(2) Der Beweis der Aussage ist volkommen analog zu 3.2.2.(2), wobei die z-Komponente genau wie die x-Komponente zu behandeln ist.

□

Der Satz 5.2.1. zeigt, daß die Dynamik von g auf $\hat{\Lambda}$ durch $(\bar{\Sigma}, \sigma)$ symbolisch beschrieben wird. Wie in 3.2.3. lassen sich wieder die üblichen Resultate über die Dynamik ableiten.

Wir wenden uns nun der durch $\hat{\pi}$ induzierten Abbildung $\hat{\pi}^*$ der Räume der Maße zu:

$$\hat{\pi}^* : M(\Sigma) \longrightarrow M(\hat{\Lambda}) \;\; mit \;\; \hat{\pi}^* b(B) = b(\hat{\pi}^{-1} B)$$

Nach 2.1.1. und 5.2.1. ist die Abbildung $\hat{\pi}^*$ surjektiv, stetig und affin.

Satz 5.2.2.

Die Einschränkung von π^* auf $M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ ist surjektiv nach $M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$ und verändert die maßtheoretische Entropie nicht. Weiterhin ist die Einschränkung von π^* auf $M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ surjektiv nach $M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$. Formal ausgedrückt gilt:
(1a) $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma) \Rightarrow \hat{\pi}^* b \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$
(1b) $b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma) \Rightarrow \hat{\pi}^* b \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$
(2a) $\forall \hat{\mu} \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g) \;\; \exists b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma) \;\;$ mit $\;\; \hat{\pi}^* b = \hat{\mu}$
(2b) $\forall \hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g) \;\; \exists b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma) \;\;$ mit $\;\; \hat{\pi}^* b = \hat{\mu}$
(3) $h_b(\sigma) = h_{\hat{\pi}^* b}(g) \;\; \forall b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$

Beweis:

(1) Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von 3.3.1.(1), so daß wir auf die Darstellung hier verzichten .

(2) Auch hier kann im wesentlichen der gleiche Beweis wie in 3.3.1.(2) geführt werden. Wir zeigen nur, daß $\hat{\mu}(\hat{\pi}(D)) = 0$ für alle $\hat{\mu} \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$ gilt. Der Rest des Beweises ist dann vollkommen analog zu 3.3.1.(2).
Es sei daran erinnert, daß $D = \Sigma \backslash \bar{\Sigma} = \{(s_k) \in \Sigma | \exists k_0 \in \mathbf{Z} \quad \forall k \leq k_0 : s_k = 1\} \backslash \{(1)\}$ die invariante Teilmenge von Σ ist, auf der σ und g nicht konjugiert sind, und daß $S^- \subseteq I$ als $\{\frac{k}{2^n} | n \in \mathbf{N} \quad k = -2^n + 1, \ldots, 2^n - 1\}$ definiert ist.

$$\hat{\pi}(D) = \{(x, y, z) \in \hat{\Lambda} | (x, z) \in \Lambda \wedge y \in S^-\} \cup \{(x, 1, z) | (x, y) \in \Lambda \backslash (1, 1)\}$$
$$\subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(\{(x, 0, z) | (x, z) \in \Lambda\}) \cup [-1, 1) \times \{1\} \times [-1, 1)$$

Falls $\hat{\mu}$ g-invariant ist ergibt sich für das Maß der vorderen Menge obiger Vereinigung der Wert null, da die unendliche Vereinigung über k disjunkt ist. Weiterhin folgt:
$\hat{\mu}(\hat{\pi}(D)) \leq \hat{\mu}([-1, 1) \times \{1\} \times [-1, 1)) = \hat{\mu}([1 - 2\beta^n, 1) \times \{1\} \times [1 - 2\tau^n, 1))$ und mit n gegen unendlich $\hat{\mu}(\hat{\pi}(D)) = 0$.

(3) Die Abbildung $\hat{\pi}$ ist nach 5.2.1. in Bezug auf ein $b \in M_{inv}(\Sigma, \sigma)$ fast überall bijektiv, da $b(D) = 0$ gilt. Die Systeme (Σ, σ, b) und $(\Lambda, g, \hat{\pi}^* b)$ sind damit maßtheoretisch konjugiert. Mit 2.2.2. folgt die Behauptung.

□

Im Anschluß an den letzten Satz lassen sich, wie in 2.3., Bilder der Bernoulli Maße $b_p \in M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ unter $\hat{\pi}^*$ definieren:

$$\hat{\mu}_p = \hat{\pi}^* b_p \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$$

Falls die Abhängigkeit der Maße von den Parametern des Lifts β und τ eine Rolle spielt, schreiben wir:

$$\hat{\mu}_{\beta,\tau,p} = \hat{\pi}^*_{\beta,\tau} b_p \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g_{\beta,\tau})$$

Mit 5.2.2.(3) lässt sich unmittelbar die maßtheoretische Entropie der Maße $\hat{\mu}_p$ bestimen: $h_{\hat{\mu}_p}(g) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$

5.3. Anwendung der Theorie von Ledrappier und Young

In diesem Abschnitt wird die von Ledrappier und Young in "Metrik Entropy of Diffeomorphismen"([LY]) entwickelte Theorie, die den Zuammenhang zwischen Entropie, Dimension und Lyapunov-Exponenten durch die Bezugnahme auf bedingte Maße klärt, auf den "Lift" der Fat Baker's Transformation angewendet. Eine Schwierigkeit die hierbei auftaucht ist, daß es sich beim "Lift" nicht um einen Diffeomorphismus handelt, zum einen liegt eine Singularität vor und zum anderen existiert die Umkehrfunktion nicht für alle Punkte in $\hat{Q}$. Daher werden wir die in [LY] mittels der Vorraussetzung eines Diffeomorphismuses konstruierten Partitionen konkret angeben und die in den Beweisen von Ledrappier und Young benötigten Eigenschaften dieser Partitionen nachweisen.

Wir definieren stabile und stark stabile Partitionen W^s und W^{ss} von $\hat{Q}$ durch:

$$W^{ss}(\bar{x}) = W^{ss}(x,y) = \{x\} \times \{y\} \times I \quad W^{ss} = \{W^{ss}(x,y) | (x,y) \in Q\}$$

$$W^{s}(\bar{x}) = W^{s}(y) = I \times \{y\} \times I \quad W^{s} = \{W^{s}(y) | y \in I\}$$

und eine unstabile Partition W^u von Ω durch :

$$W^u(\bar{x}) = \{ \begin{array}{ll} (\{x\} \times [0,1] \times \{z\}) \cap \Omega & y \in [0,1] \\ \{x\} \times [-1,0) \times \{z\} & y \in [-1,0) \end{array} \quad W^u = \{W^u(\bar{x}) | \bar{x} \in \Omega\}$$

wobei $\bar{x}$ jeweils das Tripel (x,y,z) bezeichnet.
Die unstabile Partition wird hier auf Ω und nicht auf dem ganzen Attraktor $\hat{\Lambda}$ definiert, da die Umkehrfunktion von g auf ganz Ω, aber nicht auf allen Punkten des Randes von $\hat{\Lambda}$ existiert.
Wir geben nun ein Lemma an, daß die relevanten Eigenschaften von W^{ss}, W^s und W^u beschreibt und [LY,9.1.1.] entspricht.

Lemma 5.3.1.

Sei $\hat{\mu} \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$
(1) $W^{ss}(\bar{x})$, $W^s(\bar{x})$ und $W^u(\bar{x})$ sind $\hat{\mu}$-fast überall definiert und meßbar.
(2) Es gilt $W^{ss} > g^{-1}(W^{ss})$, $W^s > g^{-1}(W^s)$, $W^u > g(W^u)$ und $W^{ss} > W^s$, wobei $W^a > W^b$ bedeutet, daß die Partition W^a die Partition W^b verfeinert.
(3) $d(g^n\bar{x}, g^n\bar{y}) = \tau^n d(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall n \geq 0 \quad \forall \bar{y} \in W^{ss}(\bar{x})$
$d(g^n\bar{x}, g^n\bar{y})) \leq \beta^n d(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall n \geq 0 \quad \forall \bar{y} \in W^{s}(\bar{x})$
$d(g^{-n}\bar{x}, g^{-n}\bar{y}) = 0.5^n d(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall n \geq 0 \quad \forall \bar{y} \in W^{u}(\bar{x})$

Beweis:

(1) Die Aussage für W^{ss} und W^s ist trivial. Da $\hat{\Lambda}\backslash\Omega \subseteq [-1,1) \times \{1\} \times [-1,1)$ und das $\hat{\mu}$-Maß dieser Menge null ist, wie wir schon in 5.2.2.(2) gesehen haben, gilt $\hat{\mu}(\Omega) = 1$. Damit sind auch die $W^u(\bar{x})$ fast überall definiert.
(2) Die Behauptung gilt da:
$g^{-1}(W^s) = \{W^s(0.5y - 0.5) \cup W^s(0.5y + 0.5)|y \in [-1,1)\} \cup \{W^s(1)\}$
$g^{-1}(W^{ss}) = \{W^{ss}(\beta^{-1}x + (1-\beta^{-1}), 0.5y - 0.5) \cup W^{ss}(\beta^{-1}x - (1-\beta^{-1}), 0.5y + 0.5)|y \in [-1,1), x \in I\} \cup \{W^s(\beta^{-1}x + (1-\beta^{-1}), 1)|x \in I\}$
$g(W^u) = \{(\{x\} \times I \times \{z\}) \cap \Omega|(x,z) \in \Lambda\}$
(3) Die Fasern $W^{ss}(\bar{x})$ werden durch g in x und y-Richtung verschoben und in z-Richtung linear mit Faktor τ kontrahiert sowie verschoben. Die Partitionselemente $W^s(\bar{x})$ werden durch g in y-Richtung verschoben und in z-Richtung mit Faktor τ sowie in x-Richtung mit Faktor β linear kontrahiert und verschoben. $W^u(\bar{x})$ wird unter g^{-1} um einhalb kontrahiert und so verschoben, daß $g^{-1}(W^u(\bar{x}))$ wieder ganz ein einem Element aus W^u liegt. Iteriert man g bzw. g^{-1}, erhält man hieraus genau die oben angegebenen Kontraktions- bzw. Expansionsaussagen für die Partitionen.

$\square$

Formal ist ein Maß $\hat{\mu} \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$ auf $(\hat{\Lambda}, B(\hat{\Lambda}))$ definiert. Da aber $B(\hat{\Lambda}) = B(\hat{Q}) \cap \hat{\Lambda}$ knnen wir μ mittels $\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(B \cap \hat{\Lambda})$ auch als Maß auf $(\hat{Q}, B(\hat{Q}))$ auffassen. Wie in 3.4. lassen sich zu $\hat{\mu}$ mittels des Satzes 3.4.3. bedingte Maße $\mu^{ss}_{x,y}$, μ^s_y und $\mu^u_{x,y,z}$ auf den Partitionen W^{ss}, W^s und W^u definieren, die durch

$$\hat{\mu}(B) = \int \mu^{ss}_{x,y}(B \cap W^{ss}(x,y))dpr_{XY}\hat{\mu}$$

$$\hat{\mu}(B) = \int \mu^s_y(B \cap W^s(y))dpr_Y\hat{\mu}$$

$$\hat{\mu}(B) = \int_{B_{W^u}(\hat{Q})} \mu^u_{x,y,z}(B \cap W^u(x,y,z))d\mu$$

für alle $B \in B(\hat{Q})$, (bis auf Nullmengen) eindeutig bestimmt sind.

Wir definieren weiterhin bedingte Entropien in Bezug auf die Partitionen durch einen lokalen Ansatz, der auch in [LY] verwendet wird.

$V^i(\bar{x}, n, \epsilon) := \{\bar{y} \in W^i(\bar{x}) \cap g^{n-1}(\bar{Q})|d(g^{-k}\bar{x}, g^{-k}\bar{y}) \leq \epsilon \quad 0 \leq k < n\} \quad i = s, ss$

$$V^u(\bar{x},n,\epsilon) := \{\bar{y} \in W^u(\bar{x}) | d(g^k\bar{x}, g^k\bar{y}) \leq \epsilon \quad 0 \leq k < n\}$$

$$\underline{\overline{h_i}}(\bar{x}) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \underline{\overline{\lim}}_{n \longrightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \hat{\mu}_i(V^i(\bar{x},\epsilon,n)) \quad i = s, ss, u$$

Ausser den in 5.3.1. diskutierten stabilen und unstabilen Partitionen konstruieren Ledrappier und Young in [LY,9] weitere Partitionen im Zusammenhang mit den bedingten Entropien, die wir in unserem Kontext konkret angeben wollen.
$\hat{Q}_{(s_k)}$ seien die in 5.1. definierten Quader. Wir definiern für $n \in \mathbf{N}$ Partitionen von $g^n(\hat{Q})$ durch:

$$\wp_n^s = \{\hat{Q}_{(s_k)} \cap g^n(\hat{Q}) \mid (s_k) \in \Sigma_n\}$$

und Partitonen von Ω durch:

$$\wp_n^u = \{(I \times [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}) \times I) \cap \Omega \mid k = -2^{n-1} \dots 2^{n-1} - 2\}$$

$$\cup \{(I \times [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1] \times I) \cap \Omega\}$$

Die, im Hinblick auf die Beweise von Ledrappier und Young, relevanten Aussagen über diese Partitionen stellen wir im folgenden Lemma zusammen (vgl. [LY,9.3.3,10.1]).

Lemma 5.3.2.

$\wp(\bar{x})$ sei jeweils das Element einer Partition das $\bar{x}$ enthält.
(1) Ist $\hat{\mu} \in M_{inv}(\hat{\Lambda}, g)$ so sind $\wp_n^s(\bar{x})$ und $\wp_n^u(\bar{x})$ $\hat{\mu}$-fast überall definiert.
(2) $\wp_n^s(\bar{x}) \cap W^s(\bar{x})$ sind Rechtecke der (x,z)-Kantenlängen $(2\beta^n, 2\tau^n)$, $\wp_n^s(\bar{x}) \cap W^{ss}(\bar{x})$ Intervalle der z-Länge $2\tau^n$ und $\wp_n^u(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ sind Intervalle der y-Länge $1/2^{n-1}$.
(3)

$$\wp_{n+m}^s = \bigvee_{k=0}^{m} g^k \wp_n^s \qquad \wp_{n+m}^u = \bigvee_{k=0}^{m} g^{-k} \wp_n^u \qquad \forall m, n \geq 0$$

Zur Definition von $\bigvee$ vgl. 2.2.1.
(4) Sei n so groß gewählt, daß $\sqrt{2\tau^n + 2\beta^n} < \epsilon$, dann gilt:

$\wp^s_{n+m}(\bar{x}) \cap W^i(\bar{x}) \subseteq V^i(\bar{x}, m, \epsilon) \quad \forall m \geq 0 \quad i = s, ss$
Falls n so groß gewählt ist, daß $1/2^{n-1} < \epsilon$, dann gilt:
$\wp^u_{n+m}(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x}) \subseteq V^u(\bar{x}, m, \epsilon) \quad \forall m \geq 0$

Beweis:

(1) ist klar da $\Omega \subseteq g^n(\hat{Q})$ und $\hat{\mu}(\Omega) = 1$.

(2) folgt unmittelbar aus der Definition der Partitionen.

(3) Aus $g(\hat{Q}_{(s_k)} \cap g^n(\hat{Q})) = (\hat{Q}_{1,s_0,\ldots,s_{n-1}} \cap g^{n+1}(\hat{Q})) \cup (\hat{Q}_{-1,s_0,\ldots,s_{n-1}} \cap g^{n+1}(\hat{Q}))$ folgt $g\wp^s_n \vee \wp^s_n = \wp^s_{n+1}$ und durch Induktion nach m die erste Formel.
Aus $g^{-1}((I \times [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}) \times I) \cap \Omega) = ((I \times [\frac{k+2^{n-1}}{2^n}, \frac{k+1+2^{n-1}}{2^n}) \times I) \cap \Omega) \cup ((I \times [\frac{k-2^{n-1}}{2^n}, \frac{k+1-2^{n-1}}{2^n}) \times I) \cap \Omega)$ und $g^{-1}((I \times [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1] \times I) \cap \Omega) = ((I \times [1 - \frac{1}{2^n}, 1] \times I) \cap \Omega) \cup ((I \times [0.5 - \frac{1}{2^n}, 0.5) \times I) \cap \Omega)$ folgt $g^{-1}\wp^u_n \vee \wp^u_n = \wp^u_{n+1}$ und wieder durch Induktion nach m die zweite Formel.

(4) Da $g^{-1}(\wp^s_n(\bar{x})) \subseteq \wp^s_{n-1}(g^{-1}\bar{x})$ erhalten wir:
$\bar{y} \in \wp^s_{n+m}(\bar{x}) \cap W^i(\bar{x}) \Rightarrow g^{-k}\bar{y} \in \wp^s_{n+m-k}(g^{-k}\bar{x}) \cap W^i(g^{-k}\bar{x}) \quad i = s, ss$
Aus $g(\wp^u_n(\bar{x})) \subseteq \wp^u_{n-1}(g\bar{x})$ folgt:
$\bar{y} \in \wp^u_{n+m}(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x}) \Rightarrow g^k\bar{y} \in \wp^u_{n+m-k}(g\bar{x}) \cap W^u(g^k\bar{x})$
Mit (2) folgen hieraus die Behauptungen.

$\square$

Im Hauptzsatz dieses Abschnittes geben wir die von Ledrappier und Young für Diffeomorphismen erzielten Eregebnisse, auf den "Lift" der Fat Bakers Transformation übertragen, an.

Satz 5.3.3.

Sei $\hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$ und seien bedingte Maße sowie Entropien wie oben definiert, dann gilt:
(1) $\overline{h_i}(\bar{x}) = \underline{h_i}(\bar{x}) = const. =: h_i$ für $\hat{\mu}$-fast alle $\bar{x} \in \hat{\Lambda}$ $\quad i = s, ss, u$
(2) $\overline{d(\bar{x}, \mu^{ss}_{x,y})} = \underline{d(\bar{x}, \mu^{ss}_{x,y})} = const. =: dim\mu^{ss}$ für $\hat{\mu}$-fast alle $\bar{x} \in \hat{\Lambda}$
$\overline{d(\bar{x}, \mu^{s}_{y})} = \underline{d(\bar{x}, \mu^{s}_{y})} = const. =: dim\mu^{s}$ für $\hat{\mu}$-fast alle $\bar{x} \in \hat{\Lambda}$
$\overline{d(\bar{x}, \mu^{u}_{\bar{x}})} = \underline{d(\bar{x}, \mu^{u}_{\bar{x}})} = const. =: dim\mu^{u}$ für $\hat{\mu}$-fast alle $\bar{x} \in \hat{\Lambda}$
(3) $\underline{d((x,y), pr^*_X\mu^s_y)} = dim\mu^s - dim\mu^{ss}$ für $pr^*_{XY}\hat{\mu}$-fast alle $(x,y) \in Q$
(4) $h_{\hat{\mu}}(g) = h_u = dim\mu^u \log 2$
$h_{\hat{\mu}}(g) = h_s = \dim \mu^s \log \beta^{-1} + dim\mu^{ss}(\log \tau^{-1} - \log \beta^{-1})$
(5) $\overline{d(\bar{x}, \hat{\mu})} \leq dim\mu^u + dim\mu^s$ für $\hat{\mu}$-fast alle $\bar{x} \in \hat{\Lambda}$
$\bar{x}$ bezeichnet in sämtlichen Aussagen das Tripel (x, y, z).

Wir beweisen die Aussagen von 5.3.3. hier nicht, sondern referieren auf die korrespondierenden Teile der Arbeit von Ledrappier und Young mit dem Hinweis, daß gerade die in 5.3.1. und 5.3.2. diskutierten Partitionen erlauben, diese auf unsere Situation zu übertragen. Der Beweis von (1) ist so analog zu [LY,9]. (2),(3) und (4) werden wie in [LY,10,11] bewiesen, und der Beweis von (5) läßt sich wie [LY,12] führen. Eine Anmerkung ist hier noch zu den in Abschnitt 11 von [LY] diskutierten transversalen Maßen und der transversalen Dimensionen zu machen. Aus der Eindeutigkeit der bedingten Maße erhalten wir für $pr^*_Y\hat{\mu}$-fast alle $y \in I$:

$$\mu^s_y(B) = \int \mu^{ss}_{x,y}(B \cap W^{ss}(x,y)) \; dpr^*_X\mu^s_y \quad \forall B \in B(W^s(y))$$

Damit sind die in [LY,11] definierten transversalen Maße in unserem Kontext durch $pr^*_X\mu^s_y$ gegeben. Die in 5.3.3.(3) auftauchende Größe $\underline{d(\bar{x}, pr^*_X\mu^s_y)}$ entspricht genau der in [LY,11] definierten transversalen Dimension von $\hat{\mu}$ auf $W^s(y)/W^{ss}$.

5.4. Dimensionsabschätzungen für ergodische Maße

Im folgenden seien zu einem $\mu \in M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$ bedingte Maße und Dimensionen wie im letzten Abschnitt definiert.
Unsere erste Dimensionsabschätzung in diesem Abschnitt bezieht sich auf beliebige g-ergodische Maße.

Satz 5.4.1.

Für alle $\hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ gilt:

$$dim_H \hat{\mu} \leq \frac{h_{\hat{\mu}}(g)}{\log 2} + \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)}$$

Beweis:

$\hat{\mu}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}) = 1 \Rightarrow \mu_y^s(W^s(y) \cap \hat{\Lambda}_{\beta,\tau}) = 1$ für $pr_Y^* \hat{\mu}$-fast alle $y \in I \Rightarrow$
$dim_H \mu_y^s \leq \dim_H(W^s(y) \cap \hat{\Lambda}_{\beta,\tau}) = \dim_H \Lambda(\beta, \tau) \leq^{5.1.2.} \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)}$
$pr_Y^* \hat{\mu}$-fast überall
Mit 4.3.3.(2) und der Kontraposition 2.3.7.(2) gilt die gleiche Abschätzung für $dim\mu^s$. Aus 4.3.3. (4) und (5) folgt mit 2.3.7.(1) die Behauptung.

□

Die im letzten Satz gegebene Abschätzung ist offenbar sehr grob, da wir die stabile Dimension $dim\mu^s$ schlicht durch die Box-Counting Dimension der Menge, auf die die bedingten Maße μ_y^s für beliebiges $\hat{\mu}$ aus $M_{erg}(\hat{\Lambda}, g)$, rein definitionsgemäß, konzentriert sind, abgeschätzt haben. Eine genauere Abschätzung für $dim\mu^s$ und damit für $\hat{\mu}$ ergibt sich, wenn wir speziell die in 5.2. definierten Bilder der Bernoulli Maße $\mu_{\beta,\tau,p}$ aus $M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ betrachten.
Wir werden hier wieder die, schon im Beweis von 5.2.1.(1) verwendete Abbildung $\hat{\pi}^+$ benötigen:

$$\hat{\pi}^+ : \quad \Sigma^+ \longrightarrow \Lambda \quad mit \quad \hat{\pi}^+((s_k)) = (\sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\beta)\beta^k, \sum_{k=0}^{\infty} s_k(1-\tau)\tau^k)$$

Mit Hilfe der Abbildung definieren wir Maße $\xi_{\beta,\tau,p}$ aus $M(\Lambda)$ durch:

$$\xi_{\beta,\tau,p} = (\hat{\pi}^+)^* b_p$$

Lemma 5.4.2.

(1) $\mu_{\beta,\tau,p} = \xi_{\beta,\tau,p} \times \bar{b}_p$, wobei $\xi_{\beta,\tau,p}$ das Maß in der (x,z)-Ebene und $\bar{b}_p$ das Maß auf der y-Achse ist.
(2) Zu $\mu_{\beta,\tau,p}$ seien Bedingte Maße μ_y^s wie in 5.3. definiert. Es gilt:
$pr_X^* \mu_y^s = \nu_{\beta,p}$ für $\bar{b}_p$-fast alle $y \in I$, d.h. die transversalen Maße zu $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}$ sind gerade durch das unendlich gefaltete Bernoulli Maß $\nu_{\beta,p}$ gegeben.

Beweis:

(1) Der hier zu führende Beweis ist analog zum Beweis von 4.1.3.. Wie dort bezeichnet pr^+ die Projektion von Σ auf Σ^+ und pr^- die Projektion auf Σ^-, darüber hinaus seien $\hat{\pi}$ und $\hat{\pi}^+$ sowie $\mu_{\beta,\tau,p}$ und $\xi_{\beta,\tau,p}$ zu festem β und τ definiert.
$\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}(B) = b_p(\hat{\pi}^{-1}B) = b_p(pr^+(\hat{\pi}^{-1}B)) \cdot b_p(pr^-(\hat{\pi}^{-1}B)) =^\star b_p((\hat{\pi}^+)^{-1}pr_{XZ}B) \cdot b_p((\pi^-)^{-1}pr_Y B) = (\hat{\pi}^+)^* b_p(pr_{XZ}B) \cdot b_p(\iota(pr_Y B)) = \xi_{\beta,\tau,p}(pr_{XZ}B) \cdot \bar{b}_p(pr_Y B) = (\xi_{\beta,\tau,p} \times \bar{b}_p)(B) \quad \forall B \in B(\hat{\Lambda})$

Die Gleichung $\star$ ist wie in 4.1.3. zu begründen.

(2) Aus (1) folgt mit der Eindeutigkeit der bedingten Maße $\mu_y^s = \xi_{\beta,\tau,p}$ für $\bar{b}_p$-fast alle $y \in I$, so daß also nur noch $pr_X^* \xi_{\beta,\tau,p} = \nu_{\beta,p}$ zu zeigen ist.
Offensichtlich gilt $pr_X^* \hat{\pi}^+ = \pi^+$ (vgl. 3.2. zu π^+). Damit gilt aber: $pr_X^* \xi_{\beta,\tau,p}(B) = \xi_{\beta,\tau,p}(pr_X^{-1}B) = b_p((\hat{\pi}^+)^{-1}pr_X^{-1}B) = b_p((\pi^+)^{-1}B) = \nu_{\beta,p}(B) \quad \forall B \in B(I)$

□

Mit den bis hierhin bewiesenen Aussagen ist der Beweis des nachstehenden Satzes unkompliziert.

Satz 5.4.3.

Ist zu $\beta \in (0.5, 1)$, $\tau \in (0, 0.5)$ und $p \in [0,1]$, $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ wie in 5.2. definiert, dann gilt:

$$dim_H \hat{\mu}_{\beta,\tau,p} \leq \frac{h_{b_p}(\sigma)}{\log 2} + \frac{G(\beta,p)}{\log \beta^{-1}} + \frac{\log 2}{\log \tau^{-1}}$$

Beweis:

Zu $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}$ seien bedingte Maße und Dimensionen wie in 5.3. definiert. Nach 5.3.3.(4) und 4.2.2.(3) gilt für die unstabile Dimension:

$$dim\mu^u = \frac{h_{\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}}(g_{\beta,\tau})}{\log 2} = \frac{h_{b_p}(\sigma)}{\log 2}$$

Die Abschätzung der stabilen Dimension $dim\mu^s$ beruht auf 5.3.3.(3). Zusammen mit 5.4.2.(2) und 2.3.7. erhalten wir:

$$dim\mu^s = dim_H\nu_{\beta,p} + dim\mu^{ss}$$

Da $\hat{\Lambda} \subseteq I \times I \times C_\tau$, gilt $\hat{\mu}(I \times I \times C_\tau) = 1$. Damit erhalten wir $\mu^{ss}_{x,y}(\{x\} \times \{y\} \times C_\tau) = 1 \quad pr^*_{XY}\hat{\mu}$-fast überall und so, mit 5.3.3.(2) und der Kontraposition 2.3.7.(2), die "grobe" Abschätzung von $dim\mu^{ss}$ durch $dim_H C_\tau = \frac{\log 2}{\log \tau^{-1}}$. Zusammen mit unserer Abschätzung der Hausdorff Dimension von $\nu_{\beta,p}$ aus 4.4.2. gilt:

$$dim\mu^s \leq \frac{G(\beta,p)}{\log \beta^{-1}} + \frac{\log 2}{\log \tau^{-1}}$$

Mit 4.4.3.(5) und 2.3.7.(1) folgt aus der Formel für die unstabile Dimension und der Abschätzung der stabilen Dimension die Behauptung des Satzes.

□

Im letzten Abschnitt der Arbeit wird gesondert auf die Bedeutung der hier erzielten Abschätzungen in Bezug auf das Variationsprinzip eingegangen.

5.5. Folgerung einer Dimensionsabschätzung für, in Bezug auf die Fat Baker's Transformation, ergodische Maße

In diesem Abschnitt wird aus der in 3.4.4. gegebenen Abschätzung der Hausdorff Dimension unstabiler Maße, die zu einem in Bezug auf die Fat Baker's Transformation ergodischen Maß definiert sind, eine Abschätzung der Hausdorff Dimension beliebiger, in Bezug auf die Fat Baker's Transformation, ergodischer Maße hergeleitet. Wesentlich für den Beweis unserer Abschätzung ist der "Lift" der Fat Baker's Transformation. Insbesondere werden wir die Abschätzung der Hausdorff Dimension beliebiger "Lift"-ergodischer Maße benötigen. Wir beginnen hier, indem wir unser Resultat formulieren:

Satz 5.5.1.

Für $\mu \in M_{erg}(Q, f)$ gilt:

$$dim_H \mu \leq \frac{h_\mu(f)}{\log 2} + 1$$

Wir benötigen für den Beweis dieses Satzes folgendes Lemma, daß die relevanten Zusammenhänge zwischen "Lift"-ergodischen und in Bezug auf die Fat Baker's Transformation ergodischen Maßen angibt.

Lemma 5.5.2.

Für alle $\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$ gilt:
$\forall \mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)\ \exists \hat{\mu}_\tau \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ mit
(1) $pr^*_{XY}\hat{\mu}_\tau = \mu$
(2) $dim_H \mu \leq dim_H \hat{\mu}_\tau$
(3) $dim \mu^u_\tau \leq dim_H \mu^u_x$ für $pr^*_X \mu$-fast alle $x \in I$
wobei $dim \mu^u_\tau$ die in 5.3.3.(2) definierte unstabile Dimension zu $\hat{\mu}_\tau$ ist, und die unstabilen Maße μ^u_x zu μ wie in 3.4. definiert sind.

Beweis:

$\beta \in (0.5, 1)$ und $\tau \in (0, 0.5)$ sowie $\mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)$ seien fest gewählt. Nach 3.3.1.(2b) existiert ein $b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ mit $\pi^*_\beta b = \mu$. Wir definieren $\hat{\mu}_\tau = \hat{\pi}^*_{\beta,\tau} b$. Nach 5.2.2.(1b) gilt $\hat{\mu}_\tau \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$. Wir weisen nun die Eigenschaften (1)-(3) für $\hat{\mu}_\tau$ nach.

(1) Offensichtlich gilt $pr_{XY} \circ \hat{\pi}_{\beta,\tau} = \pi_\beta$. Damit folgt:
$pr^*_{XY}\hat{\mu}_\tau(B) = b(\hat{\pi}^{-1}_{\beta,\tau} pr^{-1}_{XY} B) = b(\pi^{-1}_\beta B) = \mu(B)$

(2) Aus (1) erhalten wir $\hat{\mu}_\tau(B) = 1 \Rightarrow \mu(pr_{XY} B) = 1$. Nach 2.3.5.(1) gilt aber $dim_H pr_{XY} B \leq dim_H B$, so daß die Behauptung direkt aus der Definition der Hausdorff Dimension von Maßen folgt.

(3) Aus beweistechnischen Gründen definieren wir hier eine neue Partition $W^{su} = \{W^{su}(x) | x \in I\}$ von $\hat{Q}$, wobei $W^{su}(x) = \{x\} \times I^2$.

Mit 3.4.3. erhalten wir zu $\hat{\mu}_\tau$ wieder bedingte Maße μ_x^{su} auf den $W^{su}(x)$, die durch

$$\hat{\mu}_\tau(B) = \int \mu_x^{su}(B \cap W^{su}(x)) dpr_X^* \hat{\mu}_\tau \quad \forall B \in B(\hat{Q})$$

(bis auf $pr_X^*\hat{\mu}_\tau$-Nullmengen) eindeutig bestimmt sind. Wir merken an dieser Stelle an, daß aus (1) $pr_X^*\hat{\mu}_\tau = pr_X^*\mu$ folgt.

$W^u = \{W^u(x)|x \in I\}$ sei die in 3.4. definierte Partition von Q und μ_x^u die bedingten Maße auf den $W^u(x)$ zu μ. Die in 5.3.3. definierte Partition $\{W^u(x,y,z)|(x,y,z) \in \hat{\Lambda}\}$ bezeichnen wir hier, um Verwechselungen zu vermeiden, mit $\hat{W}^u$. $\mu_{x,y,z}^u$ sind die bedingten Maße auf den $W^u(x,y,z)$ zu $\hat{\mu}_\tau$.
Aus 5.3.3.(2) erhalten wir zusamen mit 2.3.7.:
$dim_H \mu_{x,y,z}^u = dim \mu_\tau^u$ für $\hat{\mu}_\tau$-fast alle $(x,y,z) \in \hat{\Lambda}$ und somit

$$(A) \quad dim_H \mu_{x,y,z}^u = dim \mu_\tau^u \text{ für } \mu_x^{su}\text{-fast alle } (x,y,z) \in W^{su}(x)$$

für $pr_X^*\mu$-fast alle $x \in I$.
Weiterhin erhalten wir aus

$$\mu(B) = \hat{\mu}_\tau(B \times I) = \int \mu_x^{su}((W^u(x) \cap B) \times I) dpr_X^* \mu \quad \forall B \in B(Q)$$

mit der Eindeutigkeit der bedingten Maß μ_x^u

$$(B) \quad pr_{XY}^* \mu_x^{su} = \mu_x^u$$

für $pr_X^*\mu$-fast alle $x \in I$.
$SU(x) := \{P \in \hat{W}^u | P \subseteq W^{su}(x)\}$ bildet für alle $x \in I$ eine Partition von $W^{su}(x) \cap \Omega$ und (da $\hat{\mu}_\tau(\Omega) = 1$) für $pr_X\hat{\mu}_\tau$-fast alle $x \in I$, eine Partition von $W^{su}(x)$, bis auf μ_x^{su}-Nullmengen.
Es gilt:

$$\hat{\mu}_\tau(B) = \int_{B_{W^u}(\hat{Q})} \mu_{x,y,z}^u(W^u(x,y,z) \cap B) d\hat{\mu}_\tau$$

$$= \int \int_{B_{SU(x)}(W^{su}(x))} \mu_{x,y,z}^u(W^u(x,y,z) \cap B) d\mu_x^{su} dpr_X^* \hat{\mu}_\tau \quad \forall B \in B(\hat{Q})$$

Aus der Eindeutigkeit der bedingten Maße μ_x^{su} folgt $pr_X^*\mu$-fast berall

$$(C) \quad \mu_x^{su}(B) = \int_{B_{SU(x)}(W^{su}(x))} \mu_{x,y,z}^u(W^u(x,y,z) \cap B) d\mu_x^{su} \quad \forall B \in B(W^{su}(x))$$

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt, daß eine Teilmenge M von I mit $pr_X^*\mu(M) = 1$ existiert, so daß (A), (B) und (C) für alle $x \in M$ erfüllt sind.
Sei $x \in M$ nun fest gewählt. Für alle $B \in B(I)$ gilt:
$\mu_x^u(\{x\} \times B) = 1 \Rightarrow^{(B)} \mu_x^{su}(\{x\} \times B \times I) = 1 \Rightarrow^{(C)}$
$\mu_{x,y,z}^u((\{x\} \times B \times I) \cap W^u(x,y,z)) = 1$ μ_x^{su}-fast überall
$\Rightarrow dim_H \mu_{x,y,z}^u \leq dim_H B$ μ_x^{su}-fast überall $\Rightarrow^{(A)} dim \mu_\tau^u \leq dim_H B$
Insgesamt gilt damit $dim \mu_\tau^u \leq dim_H \mu_x^u$ für alle $x \in M$.

□

Beweis von 5.1.1.

Zu $\mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)$ seien Maße $\hat{\mu}_\tau$ für alle $\tau \in (0, 0.5)$ wie in 5.5.2. bestimmt. Der Beweis von 5.4.1. zeigt:

$$dim_H \hat{\mu}_\tau \leq dim \mu_\tau^u + \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)} \quad \forall \tau \in (0, 0.5)$$

Mit 5.2.2. (2) und (3) folgt hieraus für alle $\tau \in (0, 0.5)$:

$$dim_H \mu \leq dim_H \mu_x^u + \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)}$$

für $pr_X^*\mu$-fast alle $x \in I$. Mit 3.4.4. ergibt sich hieraus:

$$dim_H \mu \leq \frac{h_\mu(f)}{\log 2} + \frac{\log(2\beta/\tau)}{\log(1/\tau)} \quad \forall \tau \in (0, 0.5)$$

Mit $\tau \longrightarrow 0$ folgt die Behauptung.

□

6. Resultate, Verallgemeinerungen und offene Fragen

Wir stellen hier unsere Resultate im Hinblick auf das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension zusammen. Unser erster Satz bezieht sich auf die Fat Baker's Transformation.

Satz I

Ist $\beta \in (0.5, 1)$ so gewählt, daß das unendlich gefaltete Bernoulli Maß ν_β absolut stetig ist, so ist das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für die Fat Baker's Transformation f_β auf Q erfüllt. Das eindeutig bestimmte ergodische Maß voller Hausdorff Dimension auf Q ist das SRB-Maß $\nu_\beta \times \ell$.

Ist $\beta \in (0.5, 1)$ so gewählt, daß $\beta^{-1} \in PV$, so ist das Variationsprinzip der Hausdorff Dimension für die Fat Baker's Transformation f_β nicht erfüllt, es existiert kein ergodisches Maß voller Hausdorff Dimension auf Q. Durch die Bilder der Bernoulli Maße $\mu_{\beta,p} \in M_{erg}(Q, f_\beta)$ kann die Hausdorff Dimension von Q nicht einmal approximiert werden, es gilt:

$$dim_H \mu_{\beta,p} \leq c(\beta) < 2 \quad \forall p \in [0, 1] \quad \text{wobei}$$

$$c(\beta) := sup_{p \in [0,0.5]} \{ \frac{-p \log p - (1-p)\log(1-p)}{\log 2} + min\{1, \frac{G(\beta, p)}{\log \beta^{-1}}\}\}$$

Beweis:

Ist ν_β absolut stetig, so ist das SRB-Maß $\nu \times \ell$ absolut stetig und mit 2.3.10. folgt $dim_H \nu_\beta \times \ell = 2$. Die Eindeutigkeit des Maßes mit voller Hausdorff Dimension ergibt sich aus der Dimensionsabschätzung in 5.5.1. und der Tatsache, daß $\nu_\beta \times \ell$ das eindeutig bestimmte Maß ist, daß die maßtheoretische Entropie mit $\log 2$ maximiert (vgl. 3.3.3.).
$dim_H \mu_{\beta,p} \leq c(\beta)$ folgt aus den Dimensionsabschätzungen in 4.4.2. und 5.5.1. $c(\beta) < 2$ für $\beta^{-1} \in PV$ ist eine Konsequenz der Abschätzung der Garsia Entropie in 4.3.1.(2).
Im Fall $\beta^{-1} \in PV$ folgt hieraus insbesondere, daß die Hausdorff Dimension des SRB-Maßes $\nu_\beta \times \ell$ echt kleiner als zwei ist. Mit 5.5.1. und 3.3.3. folgt

hieraus aber auch, daß alle anderern ergodischen Maße eine Hausdorff Dimension kleiner zwei haben.

□

Für den Lift der Fat Baker's Transformation erhalten wir folgenden Satz:

Satz II

Ist $\beta^{-1} \in PV$ und τ hinreichend klein, kann die Hausdorff Dimension des Attraktors des "Lifts" $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$ durch die Bilder der Bernoulli Maße $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}$ aus $M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ nicht approximiert werden, erst recht ist keines dieser Maße ein Maß voller Hausdorff Dimension auf $\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$. Es gilt:
$\forall\beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV \quad \exists\tau_0 > 0 \quad \forall\tau < \tau_0$:

$$dim_H\hat{\mu}_{\beta,\tau,p} \leq c(\beta,\tau) < 2 \leq dim_H\hat{\Lambda}_{\beta,\tau} \quad \forall p \in [0,1]$$

$$\text{wobei} \quad c(\beta,\tau) := c(\beta) - \frac{\log 2}{\log\tau}$$

Beweis:

Da die Grösse $\frac{\log(2\beta\backslash\tau)}{\log(1\backslash\tau)}$ in 5.4.1. kleiner als $1 - \frac{\log 2}{\log\tau}$ ist, folgt aus 5.4.1.:

$$dim_H\hat{\mu}_{\beta,\tau,p} \leq \frac{-p\log p - (1-p)\log(1-p)}{\log 2} + 1 - \frac{\log 2}{\log\tau}$$

Zusammen mit 5.4.2. gilt damit $dim_H\hat{\mu}_{\beta,\tau,p} \leq c(\beta) - \frac{\log 2}{\log\tau} = c(\beta,\tau) \; \forall p \in [0,1]$.
Für $\beta^{-1} \in PV$ wird $c(\beta)$, wie wir oben gesehen haben, echt kleiner als zwei. Somit wird aber auch $c(\beta,\tau)$ für τ hinreichend nahe bei null echt kleiner als zwei.
Die Ungleichung $dim_H\hat{\Lambda}_{\beta,\tau} \geq 2$ haben wir in 5.1.2. gezeigt.

□

Nach Satz I ist die Fat Baker's Transformation für $\beta^{-1} \in PV$ ein Gegenbeispiel zum Variationsprinzip der Hausdorff Dimension. Dieses Resultat spiegelt natürlich Erdös Entdeckung wieder, daß die unenendlich gefalteten Bernoulli Maße für $\beta^{-1} \in PV$ singulär sind. Unser Satz lässt allerdings die

Frage offen ob, nicht auch in diesem Fall eine Approximation der Hausdorff Dimension von Q durch die Hausdorff Dimensinon ergodischer Maße, die verschieden von den diskutierten Maßen $\mu_{\beta,p}$ sind, möglich ist.
Satz II stellt ein wesentlich "schwächeres" Resultat dar. Wir wissen nicht ob, der "Lift" im Falle $\beta^{-1} \in PV$ ein Gegenbeispiel zum Variationsprinzip der Hausdorff Dimension darstellt, sonder nur, daß die Bilder der Bernoulli Maße $\mu_{\beta,\tau,p}$ (falls τ hinreichend klein ist) keine volle Hausdorff Dimension haben. Dieses Ergebnis scheint allerdings auch von gewissem theoretischen Interesse zu sein, insbesondere wenn man sich daran errinert, daß bei den in 2.4. besprochen "McMullen-Bedford Carpets" (und deren höher dimensionalen Analoga) die Maße voller Hausdorff Dimension eindeutig als Bilder von Bernoulli Maßen bezüglich ensprechender Shift-Codierungen gegeben sind.

Eine Analyse der in Abschnitt 4 und 5 geführten Beweise der Dimensionsabschätzungen für $\mu_{\beta,p}$ bzw. $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}$ zeigt, daß wir essentiell nur die Ergodizität und Produktstruktur der Maße verwenden. Dies legt eine Verallgemeinerung der in Satz I und II für die Maße $\mu_{\beta,p}$ bzw. $\hat{\mu}_{\beta,\tau,p}$, im Fall $\beta^{-1} \in PV$, erzielten Resultate nahe.

Satz III

(1) $\forall \beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV$ gilt:

$$dim_H \mu \leq \bar{c}(\beta) < 2$$

für alle $\mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)$, die sich als ein Produkt von Maßen aus $M(I)$ darstellen lassen.
(2) $\forall \beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV \;\; \exists \tau_0 > 0 \quad \forall \tau < \tau_0$ gilt:

$$dim_H \hat{\mu} \leq \bar{c}(\beta, \tau) < 2 \leq dim_H \hat{\Lambda}_{\beta,\tau}$$

für alle $\hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$, die sich als ein Produkt eines Maßes aus $M(Q)$ auf der (x, z)-Ebene mit einem Maß aus $M(I)$ auf der y-Achse darstellen lassen.

Beweis:

(1) Sei $\beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV$ und $\mu = \nu \times \xi \in M_{erg}(Q, f_\beta)$ gegeben. Mit dem Beweis von 4.4.1. erhalten wir:

$$\overline{dim}_R \nu \leq \frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}}$$

Wie im Beweis von 4.4.2. folgt hieraus:

$$dim_H \mu \leq \frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}} + \frac{h_\xi(\bar{\sigma})}{\log 2}$$

Hieraus folgt mit 2.2.2. und 5.5.1.

$$dim_H \mu \leq \min\{\frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}}, 1\} + \frac{h_\mu(f_\beta)}{\log 2}$$

Wir müssen nun zeigen, daß dieser Ausdruck kleiner als eine, von μ unabhängige, Konstante c wird, die kleiner zwei ist.
Nach 4.3.1. existieren $\epsilon_1 > 0$ und $c_1 < 1$, so daß $G(\beta, p)/\log \beta^{-1} \leq c_1$ für alle $p \in B_{\epsilon_1}(0.5)$ gilt.
Zu ϵ_1 existiert ein ϵ_2, so daß:

$$\xi([0,1]) \notin B_{\epsilon_1}(0.5) \Rightarrow ||\mu - \mu_{0.5}||_* > \epsilon_2 \quad \forall \mu = \nu \times \xi \in M_{erg}(Q, f_\beta)$$

Mit 3.3.3. und der Oberhalbstetigkeit der maßtheoretischen Entropie existiert zu ϵ_2 ein $c_2 < 1$, so daß

$$||\mu - \mu_{0.5}||_* > \epsilon_2 \Rightarrow h_\mu(f_\beta)/\log 2 \leq c_2 \quad \forall \mu = \nu \times \xi \in M_{erg}(Q, f_\beta)$$

Damit erhalten wir:

$$dim_H \mu \leq c := max\{c_1 + 1, c_2 + 1\} < 2 \quad \forall \mu = \nu \times \xi \in M_{erg}(Q, f_\beta)$$

wobei die Konstante c unabhängig von μ ist.

(2) Sei $\beta \in (0.5, 1)$ mit $\beta^{-1} \in PV$ und $\tau \in (0, 0.5)$ gegeben. Weiterhin sei $\hat{\mu} = \hat{\nu} \times \xi \in M_{erg}(\Lambda_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$, wobei sich das Produkt aus (x, z)-Ebene und y-Achse "zusammensetzt".
Eine einfache Rechnung zeigt, daß $pr^*_{XY}\hat{\mu} = pr^*_X\hat{\nu} \times \xi$ gilt und dieses Maß in

$M_{erg}(Q, f_\beta)$ enthalten ist. Die transversalen Maße zu $\hat{\mu}$ sind also durch $pr_X^*\hat{\nu}$ gegeben (vgl. 5.4.2.). Mit den Beweisen von 4.4.1. und 4.4.2. erhalten wir:

$$dim_H pr_X \hat{\nu} \leq \frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}}$$

Mit dem Beweis von 5.4.3. und mit Hilfe von 5.4.1. sehen wir:

$$dim_H \hat{\mu} \leq \frac{h_{\hat{\mu}}(g_{\beta,\tau})}{\log 2} + min\{1, \frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}}\} - \frac{\log 2}{\log \tau^{-1}}$$

Die gleiche Argumentation wie in (1) zeigt, daß:

$$sup\{\frac{h_{\hat{\mu}}(g_{\beta,\tau})}{\log 2} + min\{1, \frac{G(\beta, \xi([0,1]))}{\log \beta^{-1}}\} | \hat{\mu} = \hat{\nu} \times \xi \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})\} < 2$$

Es ist jedoch von vorherein nicht klar, ob dieses Supremum unabähngig von τ ist. Um einzusehen, daß dies aber doch der Fall ist, zeigen wir:

$$\forall \tau_1, \tau_2 \in (0, 0.5.) \;\; \forall \hat{\mu}_{\tau_1} = \hat{\nu}_{\tau_1} \times \xi_{\tau_1} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau_1}, g_{\beta,\tau_1})$$

$$\exists \hat{\mu}_{\tau_2} = \hat{\nu}_{\tau_2} \times \xi_{\tau_2} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau_2}, g_{\beta,\tau_2}) \text{ mit}$$
$$\xi_{\tau_1}([0,1]) = \xi_{\tau_2}([0,1]) \text{ und } h_{\hat{\mu}_{\tau_1}}(g_{\beta,\tau_1}) = h_{\hat{\mu}_{\tau_2}}(g_{\beta,\tau_2})$$

Nach 5.2.2.(2) existiert zu $\hat{\mu}_{\tau_1} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau_1}, g_{\beta,\tau_1})$ ein $b \in M_{erg}(\Sigma, \sigma)$ mit $\hat{\pi}^*_{\beta,\tau_1} b = \hat{\mu}_{\tau_1}$. Darüberhinaus lässt sich zeigen, daß b ein Produkt von Maßen aus b^+ auf Σ^+ und b^- auf Σ^- ist, für die $(\hat{\pi}^+_{\beta,\tau_1})^* b^+ = \hat{\nu}_{\tau_1}$ und $(\hat{\pi}^-)^* = \xi_{\tau_1}$ gilt. Definieren wir nun $\hat{\mu}_{\tau_2} := \hat{\pi}^*_{\beta,\tau_2} b$, so ist dieses Maß nach 5.2.2.(1) in $M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau_2}, g_{\beta,\tau_2})$, und nach 5.2.2.(3) stimmt seine maßtheoretische Entropie mit der von $\hat{\mu}_{\tau_1}$ überein. Darüberhinaus gilt:
$\hat{\mu}_{\tau_2} = \hat{\pi}^*_{\beta,\tau_2}(b^+ \times b^-) = (\hat{\pi}^+_{\beta,\tau_2})^* b^+ \times (\pi^-)^* b^- = (\hat{\pi}^+_{\beta,\tau_2})^* b^+ \times \xi_{\tau_1}$
Damit hat $\hat{\mu}_{\tau_2}$ aber alle gewünschten Eigenschaften, und wir haben die Unabhängigkeit obigen Supremums von τ bewiesen.
Nun sieht man das für hinreichend kleines τ die Behauptung folgt.

□

Die Beantwortung der Fragen, ob sich zu jedem $\mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)$ und zu jedem $\hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})$ ein ergodisches Maß mit grösserer Hausdorff Dimension finden lässt, das den Produktbedingungen in Satz III genügt, würde weitere

Untersuchungen erfordern, die im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht mehr durchgeführt werden konnten. Rein intuitiv scheint es jedoch nicht abwegig zu sein, daß die Antwort auf die Fragen positiv ausfällt, und somit für $\beta^{-1} \in PV$ sogar

$$sup\{dim_H \mu | \mu \in M_{erg}(Q, f_\beta)\} < 2 \text{ und}$$

$$sup\{dim_H \hat{\mu} | \hat{\mu} \in M_{erg}(\hat{\Lambda}_{\beta,\tau}, g_{\beta,\tau})\} < 2 \text{ für } \tau \text{ hinreichend klein}$$

gelten könnte.

Literaturliste

[AY] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Fat Baker's Transformation's, Ergodic Thy. Dyn. Sys. 4, 1-23, 1984.

[BE] T. Bedford, Crinkly curves, Markov partitons and box dimension in self-similar sets, Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1984.

[BDGPS] M.J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.P. Schreiber, Pisot and Salem numbers, Birkhauser Verlag Basel, 1992.

[BO] R. Bowen, Topological entropy for non-compact sets, Trans. Amer. Math. Soc. 184, 125-136, 1973.

[BR] R. Bowen and D. Ruelle, The ergodic theory of Axiom A flows, Inventiones Math. 29, 181-202, 1975.

[CFS] Cornfeld, Fomin and Sinai, Ergodic theory, Springer Verlag Berlin, 1982.

[DGS] M. Denker, C. Grillenberger, K.Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture Notes in Math. 527, Springer Verlag Berlin, 1976.

[ER1] P. Erdös, On a family of symmetric Bernoulli convolutions, , Amer. J. Math 61, 974-976, 1939.

[ER2] P. Erdös, On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions, Amer. J. Math. 62, 180-186, 1940.

[FA] K. Falconer, Fractal Geometry-Mathematical foundations and applications, Wiley, New York, 1990.

[GA1] A.M. Garsia, Entropy and singularity of infinite convolutions, Pac. J. Math. 13, 1159-1169, 1963.

[GA2] A.M. Garsia, Arithmetic properties of Bernoulli co-nvolutions, Trans. Amer. Math. Soc. 162, 409-432, 1962.

[GL] D. Gatzouras and S. Lalley, Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals, Indiana Univ. Math. J. 41, 533-568, 1992.

[GP] D. Gatzouras and Y. Peres, The variational prinziple for Hausdorff dimension, Manuskript.

[HU] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30, 271-280, 1981.

[JW] B. Jessen and A. Winter, Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. 38, 48-88, 1935.

[KP] R. Kenyon and Y. Peres, Measures of full dimension on affine-invariant sets, Ergodic Thy. Dyn. Sys. 16, 307-323, 1996.

[LP] F. Ledrappier and A. Porzio, A dimension formula for Bernoulli convolutions, J. Stat. Physics 76, 1307-1327, 1994.

[LY] F. Ledrappier and L.-S. Young, The metric entropy of diffeomorphismen, Ann. Math. 122, 509-574, 1985.

[MA] A. Manning, A relation between Lyapunov exponents, Hausdorff dimension and entropy, Ergodic Thy. Dyn. Sys. 1, 451-459, 1981.

[MC] C. McMullen, The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets, Nagoya Math. J. 96, 1-9, 1984.

[PO] M. Pollicott, Lectures on ergodic and Pesin theory on compact manifolds, Cambridge, University Press, 1993.

[PS] Y. Peres and B. Solomyak, Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof, Manuskript.

[PU] F. Przytycki and M. Urbanski, On Hausdorff dimension of some fractal sets, Studia Math. 93, 155-186, 1989.

[PW] M. Pollicott and H. Weiss, The dimension of self affine limit sets in the plane, J. Stat. Phys. 77, 841-860, 1994.

[RU] D. Ruelle, A measure associtated with Axiom A attractors, Amer. J. Math. 98, 619-654, 1976.

[SA] R. Salem, A remarkable class of algebraic intergers, Duke Math. J. 11, 103-108, 1944.

[SI] I.G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory, Russian Math. Surveys 27, No.4, 21-69, 1972.

[SO] B. Solomyak, On the random series $\sum \pm\lambda^i$ (an Erdös problem), Ann. Math. 142, 1995.

[TH] T.-Y. Hu, The local dimension of the Bernoulli convolution associated with the golden number, Manuskript.

[WA] P. Walters, An introduction to ergodic theory, Springer Verlag Berlin, 1982.

[WI] A. Winter, On convergent Poisson convolutions, Amer. J. Math. 57, 827-838, 1935.

[YO] L.-S. Young, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, Ergodic Thy. Dyn. Sys. 2, 109-124, 1982.