Zentrale, Schöne und Seltsame Sätze der Mathematik

J. Neunhäuserer [1]

Zusammenfassung

Wir stellen eine Auswahl der Hauptergebnisse der klassischen und modernen Mathematik dar. Unser Schwerpunkt sind zentrale Aussagen, die im Zentrum einer Theorie stehen, sowie besonders schöne und seltsame Einzelresultate. Wir definieren verwendete Begriffe so sie nicht als elementar vorausgesetzt werden können. Einige Referenzen und historische Anmerkungen zu den Beweisen werden im Anschluß an die Sätze gegeben. Im Anhang findet sich eine Einführung in die naive Mengenlehre, die verwendeten Zahlenbereiche sowie den Grenzwertbegriff.

1 Einleitung

Archäologische Funde zeigen uns, daßdie Menschheit seit mehr als 20000 Jahren Mathematik betreibt. Am Beginn der mathematischen Tätigkeit stand wohl das Zählen, sowie der Vergleich und die Anordnung räumlicher Grössen. Die Mathematik, als was wir sie heute verstehen, taucht zum ersten mal in der griechischen Antike auf.[2] Die zwei wesentlichen Merkmale der Mathematik die ausgebildet werden, sind die Axiomatisierung d.h. die explizite Angabe von Voraussetzungen und die deduktive Ableitung mathematischer Sätze aus den Voraussetzungen mittels logischer Regeln. Die griechische Antike scheint sowohl die Geburtsstunde als auch die erste große Blütezeit der Mathematik zu sein. Bis heute zeugen hiervon eine Reihe fundamentaler und schöner Sätze. Getrag wird die Entwicklung von den Schulen herausragender Mathematiker und Philosophen wie Thales (625-575 v.C.), Pytagoras (um 570 v.C), Platon (427-348 v.C.), Aristoteles (384-322 v.C.), und Euklid (um 300 v.C.). Folgen wir den Historikern kam es für viele Jahrhunderte nach der frühen griechischen Hochkultur ehr zu einer Stagnation als zu einer Weiterentwicklung der Mathematik, im fundementalen Sinne. Erst mit dem Beginn der Neuzeit kam es weltweit erneut zu einem verstärkten Interesse an mathematischer Forschung. Von da an ist eine kontinuierliche Entwicklung und Ausgestaltung der modernen Mathematik zu erkennen. Getrangen wird diese Entwicklung von großen Persöhnlichkeiten wie Newton (1643-1727), Leipnitz (1646-1716, den Gebrüdern Bernoulli (um 1700), Euler (1707-1783), Gauß (1777-1855), Abel (1802-1829), Galoia (1811-1832), Rieman (1826-1866), Poincare (1854-1912), Hilbert (1862-1943), Cantor (1845-1918), Gödel (1906-1978) und Erdös (1913-1996). Um die Jahrhundertwende ist mit der Axiomatisierungen und Begrifflichen Klährung der Grundlagen der Mathematik sowie einzelner Forschungsgebiete, wie der Algebra und der Analysis ein zweiter Höhpunkt in der Entwicklung der Mathematik erreicht. Entscheidend ist hierbei die Einsicht, daßwir, ausgehend von unterschiedlichsten Begriffssythemen und sich zum Teil widersprechenden Vorausetzungssysthemen, Mathematik betreiben können. In den letzten Jahrzehnten scheint fundamentale Mathematische

[1]Wachtelpforte 30, 38649 Goslar, Germany
e-mail: neunchen@aol.com

[2]Zur Geschichte der Mathematik vgl. [4]

Forschung eher in eine allgemeine Krise geraten zu sein. Die Gründe hierfür sind in der Hohen Spezialisierung innerhalb der Mathematik, dem übermaß an produzierte und publizierter mathematischer Information und dem zunehmenden gesellschaftlichen Druck auf Interdisziplinäre Zusammenarbeit und Anwendung der Mathematik zu sehen. Ohne Frage finden viele mathematische Satze ihre Anwendung zum Beispiel in der Beschreibung der Natur, der Technologischen Entwicklung oder sogar im wirtschaftlichen und sozialen Gebaren der Menschheit. Die Anwendbarkeit gehört aber nicht zum Wesen und der eigentlichen Bedeutung Mathematischer Sätze. Was mathematische Erkenntnis auszeichnet ist ihre Unabhängikeit und Notwendigkeit in zweifachen Sinne. Die Wahrheit eines mathematischen Satzes und damit sein Gehalt ist nicht abhängig von der Beschaffenheit der raumzeitlichen Welt, des Universum oder der Natur und sie ist genauso wenig abhängig von der mentalen und psychologischen Beschaffenheit des Subjekts der Erkenntnis. Wäre nie ein Universum entstanden und würde kein wie auch immer beschaffenes Bewußsein einen Gedanken fassen, wäre der Satz, daßes unendlich viel Primzahlen gibt genauso wahr. Mathematische Sätze sind weiterhin notwendig in dem Sinne das sie in allen logisch möglichen Welten gelten. Die hier gegeben Bestimmung des Wesens der Mathematik setzt keine semantische oder ontologische Festlegung voraus. Man mag die Platonische Haltung vertreten, daß die Wahrheit mathematischer Sätze in ihre Korrespondenz mit einer Idealen Welt reiner und notwendiger Ideen besteht. Man mag aber genauso gut der formalistischen Auffassung sein, daß die Wahrheit eines Mathematischen Satzes nicht mehr Bedeutete als das er sich durch die Anwendung bestimmter formaler Regeln aus bestimmten formalen Voraussetzungen ergibt. Beide Auffassungen sind mit der Bestimmung mathematischer Sätze als unabhängig von raumzeitlicher Welt und erkennendem Bewußtsein vereinbar. Das Faktum das Menschen zu mathematischen Erkenntnis, in dem hier bestimmten Sinn, befähigt sind ist für sich genommen ein großartiges und einem Wunder gleichendes Phänomen. Die Beschäftigung mit Mathematik als Selbstzweck erlaubt es dem Menschen tatsächlich ein Jenseits dieser Welt und dieses Lebens zu erkunden und einen Einblick in ein, je nach Geschmack ideales oder formales, Sein zu gewinnen. Grade in diesem Sinne soll vorliegender Text verstanden werden. Wir stellen hier ein Auswahl mathematischer Sätze um ihrer selbst willen, zum Zweck unserer Erbauung dar. Die Auswahl der Sätze folgt drei Kriterien. Wir nehmen Sätze auf die eine zentrale und tragende Rolle in einem Theoriegebäude spielen, stellen Sätze dar die unserem persönlichen Geschmack nach besonders schön sind und beschreiben seltsame Resultat die erster Intuition widersprechen und damit den Rahmen unsere Intuition erweitern. Wir erheben selbstredend nicht den Anspruch das unsere Darstellung Umfassend oder vollständig ist.
Wir hoffen das der Text einem Laien mit guter mathematischer Bildung und einem Studenten der Mathematik oder der Naturwissenschaften im Grundstudium problemlos zugänglich ist. Der verwendete Formalismus insbesondere die zugrundegelegt naive Mengenlehre, die verwendeten Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, sowie der Grenzwertbegriff werden im Anhang erläutert. Das erste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit den Grundlagen der Mathematik insbesondere mit Ergebnissen und Konsequenzen der formalen Mengenlehre. In den zwei darauf folgenden Kapiteln gehen wir auf Resultate der Algebra und Zahlentheorie ein. Dann Verlassen wir den Bereich der Zahlen und beschäftigen uns mit Sätzen der Geometrie und Analysis. Am Ende finden sich zwei Abschnitte über Forschungsgebiet, in denen aktuell große Fortschritte zu erkennen sind, nämlich die Theorie Dynamischer Systeme und die Diskrete Mathematik.

Wir werden in diesem Text keine Beweise der angegebenen Sätze darstellen und stattdessen auf entsprechende Quellen, in denen sich die Beweise finden, verweisen. Falls sich die Gelegenheit ergibt werden wir ein Buch, das viele schöne Beweise der hier dargestellten Resultate enthält, abschließen.

2 Grundlagen

Definition 2.1 *Seien M und N Mengen. Eine Abbildung $f : M \longmapsto N$ heißt bijektiv falls zu jedem $y \in N$ genau ein(!) Urbild $x \in M$ existiert sodaß $f(x) = y$. Falls solch eine Abbildung existiert heißen M und N gleichmächtig. Eine Menge M heißt unendlich falls eine Menge $N \subseteq M$ mit $N \neq M$ existiert, die zu M gleichmächtig ist.*

Theorem 2.1 *Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist unendlich.*

Die hier gegbene Definition der Unendlichkeit einer Menge geht auf Bolzano (1781-1848) zurück. Den (einfachen) Beweis unseres ersten Satzes überlassen wir dem Leser.

Definition 2.2 *Eine Menge M heißt abzählbar unendlich falls M gleichmächtig zu den natürlicehn Zahlen $\mathbb{N}$ ist. Eine unendliche Menge M heißt überabzählber unendlich falls M nicht abzählbar unendlich ist.*

Theorem 2.2 *Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ sind abezählbar unendliche. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der transzendenten (nicht algebraischen) reellen Zahlen sind üaberazählbar unendlich und gleichmächtig.*[3]

Überrachend ist das die Dimension einer unendlichen Menge keinen Einfluss auf deren Mächtigkeit hat:

Theorem 2.3 *Ist A unendlich so sind A und A^n gleichmächtig. Insbesonderere sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ sowie $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ und die Menge der komplexen Zahle $\mathbb{C}$ gleichmächtig.*

Im Gegensatz hierzu hat die Potenzmenge einer Menge immer grössere Mächtigkeit:

Theorem 2.4 *X und die Potenzmenge $P(X) := \{Y | Y \subseteq X\}$ sind nicht gleichmächtig. Insbesondere sind die überabzählbar unendlichen Mengen*

$$\mathbb{R},\ P(\mathbb{R}),\ P(P(\mathbb{R})),\ P(P(P(\mathbb{R}))), \ldots$$

nicht gleichmächtig.

Dies sind drei Ergebnisse des genialen Mathematikers und Begründers der Mengenlehre Cantor (1845-1918). Sie zeigen uns, daßes in der Unendlichkeit von Mengen Abstufungen gibt und das sogar unendliche viele Abstufungen der Unendlichkeit existieren, vgl [24]. Für einen Laien ist dies wohl eine sehr gewöhnungsbedürftige Tatsache.

[3] Die Definitionen der Zahlenbereiche findet sich im Anhang.

Theorem 2.5 *Die Kontinuums Hypothese, d.h. die Aussage*

Jede unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ oder zu $\mathbb{N}$

ist unabhängig von den anderen Axiomen der Mengenlehre; man kann die Kontinuums Hypothese oder ihre Negation der Mengenlehre als Axiom hinzufügen.

Im ersten Augenblick würden wir wohl selbstverständlich davon ausgehen, dass die Frage ob eine bestimmte Teilmenge der reellen Zahlen existiert oder nicht, nicht von unsere Entscheidung abhängt und wir es herausfinden können. Obiger Satz der auf die Arbeit von Gödel (1906-1978) zurückgeht und in der hier dargestellten Form von Cohen 1962 bewiesen wurde, zeigt aber das dies nicht der Fall ist, vgl. [6].

Definition 2.3 *Die Aussage*

Zu einer beliebigen Familie von Mengen $(X_i)_{i\in I}$ gibt es eine Auswahlfunktion

$$f : \{X_i | i \in I\} \longmapsto \bigcup_{i\in I} X_i$$

die jeder der Mengen eines ihrer Elemente zuordnet d.h. $f(X_i) \in X_i$.

heißt Auswahlaxiom.

Nicht alle Mathematiker sind bereit das Auswahlaxiom zu verwenden. Insbesondere die so genannten Intuitionisten lehnen das Axiom ab, da es die Existenz eines Objekts behauptet ohne eine Möglichkeit der Konstruktion anzugeben, vgl. [21]. Wir werden hier zwei Folgerungen des Auswahlaxioms über unendlich dimensionale Räume und eine paradox anmutende Konsequenz über die Zerlegungen einer Kugel darstellen.

Definition 2.4 *Ein $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) Vektorraum ist eine Menge V versehen mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : V \times V \longmapsto V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \quad (resp.\ \mathbb{C}) \times V \longmapsto V$$

wobei + die Rechenregeln der Addition erfüllt und das Distributivgesetz

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$$

für $a, b \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) gilt. Eine Menge $B = \{v_i | i \in I\} \subseteq V$ heißt Basis von V wenn

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

für alle $i \in I$ gilt und B maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Eine Einführung in die lineare Algebra und eine Definition des grundlegenden Bergriffs der Vektorräume findet sich in vielen Bücher, vgl. zum Beispie [15].

Theorem 2.6 *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

Der Basisexistentzsatz lässt sich mit Hilfe von Zorn's Lemma beweisen, dass zum Auswahlaxiom äquivalen ist, vgl. [15]. Der Satz ist, in der hier beschriebenen Allgemeinheit, insbesondere für unendlich dimensionale Räume wie Funktionräume von Interesse. Für endlich dimensionale Räume wie $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist der Satz mit Hilfe der Induktion über die Dimension leicht zu beweisen.

Definition 2.5 *Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einem System*

$$T = \{O_i | O_i \subseteq X, \quad i \in I\}$$

von Teilmengen die

$$X, \emptyset \in T$$
$$O_1, O_2 \in T \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in T$$
$$O_i \in T \ , \ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{\imath \in \mathbb{N}} O_i \in T$$

erfüllen. Die Mengen in T heißen offen. X heißt kompakt falls jede Überdeckung von X mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung hat.

Theorem 2.7 *Sind die Räume X_i für $i \in I$ kompakt so ist das Produkt*

$$\prod_{i \in I} X_i$$

kompakt, insbesondere ist der Hibertsche Würfel

$$\prod_{i=1}^{\infty} [0,1]^i$$

kompakt.

Dieser Satz von Tychonoff ist ein äusserst tiefes Resultat der mengentheoretischen Topologie, da es uns erlaubt Aussagen ber unendlichdimensionale Räume zu machen. Der Beweis von Tychnoff benutzt das Auswahlaxiom. Mann kann sogar zeigen das der Satz zum Auswahlaxiom äquivalent ist, vgl. [7] und [18].

Theorem 2.8 *Die volle Einheitskugel*

$$\mathbb{B}^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ \|x\| \leq 1\}$$

lässt sich so in disjunkte Teilmengen $\{A_i \subseteq \mathbb{B}^3 | i = 1 \dots n\}$ und $\{B_i \subseteq \mathbb{B}^3 | i = 1 \dots m\}$ zerlegen,

$$\mathbb{B}^3 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} B_i,$$

sodaß sich sowohl aus den A_i als auch aus den B_i jeweils eine volle Einheitskugel $\mathbb{B}^3$ zusammensetzen lässt d.h.

$$\mathbb{B}^3 = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i) \qquad \mathbb{B}^3 = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(B_i)$$

wobei die Abbildungen f_i und g_i $i = 1 \dots n$ in der Hintereinanderausführung von Drehungen und Schiebungen bestehen.

Diese scheinbare Paradox wurde von Banach(1892-1945) und Tarski(1901-1983) gefunden und bildet einen der Ausgangspunkte für eine Axiomatisierung der Maßtheorie. Die Auflösung des Paradoxons besteht darin das sich nicht alle Mengen sinvoll meßen lassen. Den im Satz auftauchenden Mengen lässt sich auf keine Art ein Volumen oder ein anderes Maß zusprechen, vgl. [28].

3 Algebra

Definition 3.1 *Ein Polynom ist eine Abbildung $p : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ der Form*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0 \ldots n$ und $a_n \neq 0$. n heißt Grad des Polynoms p. Sind die Koeffizienten a_i rational d.h. $a_i \in \mathbb{Q}$ so heisst

$$p(z) = 0$$

algebraische Gleichung n-ten Grades.

Theorem 3.1 *Jedes Polynom vom Grades $n > 0$ hat mindestens eine Nullstellen in $\mathbb{C}$. Weiterhin lässt sich ein Polynom p vom Grade n in lineare Faktoren $(z - z_i)$, $i = 1 \ldots n$, zerlegen, d.h.*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Die Nullstellen z_i können hierbei mehrfach auftreten. Eine algebraische Gleichung n-ten Grades hat damit (mit Vielfachheit gezählt) genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.

Theorem 3.1 ist der Fundamentalsatz der Algebra. Der erste Beweis wurde von Gauß (1777-1855) erbracht. Wir verfügen heute über viele verschiedene Beweise dieses Satzes die unterschiedliche Methoden benutzen. Ein moderner Beweis mit funktionentheoretischen Mittel findet sich in [11].

Definition 3.2 *Die Lösungen algebraischer Gleichungen werden algebraische Zahlen genannt. Die Menge der algebraischen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{A}$.*

Für die Grade zwei, drei und vier gibt es explizite Lösungsformeln für algebraische Gleichungen.

Theorem 3.2 *Algebraische Gleichungen vom Grade $n < 5$ sind durch Radikale d.h. durch arithmetische Ausdrücke die Potenzen resp. Wurzeln enthalten lösbar. Die quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ hat die Lösungen*

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}.$$

Die kubische Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ hat die Lösungen

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{q}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{((\frac{q}{2})^2 + (\frac{q}{3})^3}}.$$

Lösungen bestimmter quadratischer Gleichung gelangen bereits in der Babyonischen Kultur (ca. 2000 v.C.). Die allgemeine Lösungsformel wurde wohl von dem inischen Mathematik Bramagupta (598-665 n.C.) zum ersten mal angegeben. In der italienschen Renaissance bestand große Interesse an algebraischen Gleichungen. Die Lösung der kubischen Gleichung geht auf De Ferro (1465-1526) und Tartalglias (1499-1557) zurück und wurde erstmals von Cardano (1501-1576) mit Beweis veröffentlicht. Die allgemeine Lösung von Gleichungen vierten Grades gelang Ferrari (1522-1565).

Theorem 3.3 *Algebraische Gleichungen vom Grade $n \geq 5$ sind im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar.*

Der Beweis dieses Satzes geht auf Abel (1802-1829) zurück. Eine Charakterisierung der auflösbaren Gleichungen gelang Galoia (1811-1832). Ob eine algebraische Gleichung auflösbar ist oder nicht, wird durch die Auflösbarkeit der Galoiagruppe bestimmt, die der Gleichung zugeordnet wird. Diese Theorie ist wesentlicher Bestandteil der modernen Algebra, vgl. [27].

4 Zahlentheorie

Definition 4.1 *Eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ heiß Primzahl wenn p nur die Teiler 1 und p hat d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(p = nm \Rightarrow n = 1 \text{ oder } m = 1)$$

Theorem 4.1 *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Der klassische Beweis von Theorem 2.1 durch Widerspruch stammt von Euklid (um 300 v.C.). In [1] finden sich sechs verschiedene Beweise der Aussage. Ein weiteres grundlegendes Ergebnis über die Existenz von Primzahlen ist der folgende Satz.

Theorem 4.2 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Dieser Satz wurde von Bertrand 1845 vermutet und von Tschebyschew 1850 bewiesen. Ein eleganter Beweis gelang Erdös (1913-1996), vgl [9]. Die Frage von Oppermann (1882) ob es auch immer eine Primzahl zwischen n^2 und $n(n-1)$ gibt ist aber immer noch offen. Eine weitere wichtige zahlentheoretische Vermutung betrifft Zwillinge vom Primzahlen.

Definition 4.2 *Ein Paar von natürlichen Zahlen p und $p + 2$ heißt Primzahlezwilling wenn es sich bei beiden Zahlen um Primzahlen handelt.*

Vermutung 4.1 *Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.*

Numerische Untersuchungen legen nahe das dieser Satz wahr ist, wir verfügen allerdings noch immer über keinen Beweis. Genauso verhält es sich mit der Vermutung von Goldbach (1690-1764):

Vermutung 4.2 *Jede grade Zahl ist die Summe von zwei Primzahlen.*

Wir haben jedoch folgendes schöne Resultat:

Theorem 4.3 *Jede Primzahl p der Form $p = 4m+1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist die Summe von zwei Quadraten, d.h.*

$$p = a^2 + b^2.$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Dieser Satz stammt von Fermat (1601-1665), ein moderner Beweis findet sich in [1]. Für beliebige natürliche Zahlen gilt der vierquadrate Satz:

Theorem 4.4 *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe von vier Quadraten d.h. es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sodaß*

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Dieses Resultate wurde von Lagrange (1736-1813) entdeckt. Ein Beweis findet sich in [12].

Definition 4.3 *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. (a, b, c) heißst Pytagoräisches Tripel wenn*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Theorem 4.5 *Es gibt unendlich viele Pytagoräische Tripel (a, b, c). Diese sind gegeben durch*

$$a = (p^2 - q^2)r$$
$$b = 2pqr$$
$$c = (p^2 + q^2)r$$

wobei $p, q, r \in \mathbb{N}$

Dieses Resultat findet sich in anderer Form bereits bei Euklid (um 300 v.C). Wir verweisen auf [23] für einen Beweis.

Theorem 4.6 *Für kein $n > 2$ gibt es naürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a^n + b^n = c^n$.*

Dieser Satz wurde von Fermatt (1601-1655) vermutet und erst 1995 von Wiles und Taylor bewiesen, vgl. [29] und [25]. Der Beweis ist aufwendigt und benutzt einen großen Teil der Maschinerie der modernen Mathematik.

Als nächstes besprechen wir ein schönes Resultat der algebraischen Zahlentheorie.

Definition 4.4 *Eine algebraische Zahl $\Upsilon \in \mathbb{R}$ mit $\Upsilon > 1$ heißt Pisot Zahl wenn alle anderen Lösungen der algebraischen Gleichung einen Betrag kleiner als eins haben. Beispiel sind die reellen Lösungen der Gleichungen*

$$x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1 = 0.$$

Theorem 4.7 *Potenzen von Pisot Zahlen kommen natürlichen Zahlen exponentiell nahe d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodaß*

$$\|\Upsilon^n - m\| < C^n$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante kleiner 1 ist.

Ein ganzes Buch ist Pisot und Salem Zahlen gewidmet, hier findet sich auch der Beweis von Theorem 4.6, vgl. [3].

Die ersten nicht algebraischen Zahlen wurden von Liouville (1809-1882) gefunden:

Definition 4.5 *Eine irrationale Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heisst Liouville Zahl, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}.$$

Beispiele von Liouville Zahlen sind durch

$$l(d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d^{n!}}$$

für $d \geq 2$ gegeben. Alle algebraischen Zahlen lassen sich schlechter als Liouville Zahlen durch rationale Zahlen approximieren, vgl [12]. Hieraus ergibt sich:

Theorem 4.8 *Liouville Zahlen sind tranzendent, d.h. nicht algebraisch.*

Nun werden wir klassischen Konstanten der Analysis einführen:

Definition 4.6 *Die Eulersche Zahl e ist definiert durch*

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Die Kreiszahl π ist definiert als die Hälfte der Länge des Einheitskreisrings

$$\mathbb{S}^1 := \{z | \|z\| = 1\}.$$

In der Definition von e setzen wir hier die Konvergenz der unendlichen Reihe voraus. Sie ist mit analytischen Methoden leicht zu zeigen, vgl. [13]. Die Definition von π, die wir hier geometrisch durchführen, ist auch mit Hilfe der Nullstellen trigeometrischer Funktionen sin und cos möglich, vgl. hierzu Kapitel 5 und [13].

Theorem 4.9 *Die Zahlen e und π sind tranzendent.*

Die Transzendents von e wurde von Hermite 1873 bewiesen, die Transzendenz von π 1882 von Lindemann, vgl [19]. Beide Beweise sind recht kompliziert. Die Irrationalität von e und π ist wesentlich leichter zu beweisen, vgl.[1]. Zum Schluss stellen wir hier noch einige Hauptresultate der analytische Zahlentheorie dar.

Definition 4.7 *$\pi(n)$ sei die Anzahl der Primzahlen die kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}$ sind,*

$$\pi(n) = \sharp\{p | p \leq n \quad p \ prim \ \}.$$

Theorem 4.10 *Asymptotisch ist $\pi(n)$ durch $n/\log(n)$ gegeben, d.h.*

$$\lim_{n \longmapsto \infty} \frac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1.$$

Dieser Satz wurde schon von Gauß(1777-1855) vermutet und 1896 von Hadamart bewiesen. Ein elementarer Beweis wurde von Erdös 1949 und von Selberg 1950 gefunden. Es gibt einige weiterreichende Resultat über die Verteilung der Primzahlen die in engem Zusammenhang mit der Riemanschen Hypothese (s.u.). Einen Beweis des Satzes und weitere Ergebnisse zur Primzahlverteilung finden sich in [22].

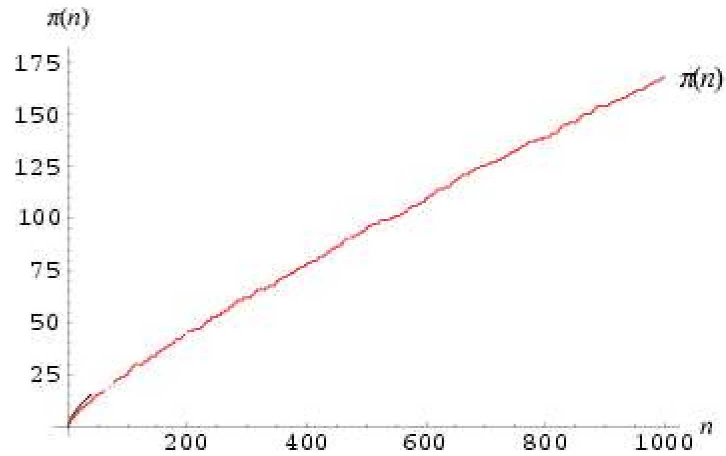

Abbildung 1: Der Graph von $\pi(n)$

Definition 4.8 *Die Funktion* $\zeta : \mathbb{C}\backslash\{1\} \longmapsto \mathbb{C}$ *gegeben durch*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

heißt Riemansche Zetafunktion.

Theorem 4.11

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{N}\ \mathit{Primzahl}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Diese Gleichung geht auf Euler (1701-1783) zurück und folgt leicht aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl, vgl. [22].

Theorem 4.12 *Für* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$$

wobei die Bernoulli Zahle B_k *durch die Rekursion*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 \ \text{für } n = 1 \\ 0 \ \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

gegeben sind. Insbesondere gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Diese wunderschöne Formel wurden von Euler(1701-1783) gefunden, vgl. [11] für einen Beweis.

Vermutung 4.3 *Alle Nullstellen von ζ ausser den trivialen Nullstellen $\{-2, -4, -6, \ldots\}$ liegen auf der Graden $\{z|z = 1/2 + ix,\ x \in \mathbb{R}\}$.*

Dies ist Riemansche Vermutung und heutzutage wohl das zentrale Problem der analytischen Zahlentheorie, vgl. [22].

5 Geometrie

Wie beginnen dieses Abschnitt mit dem Teilungsverhältniss dass seit der Antike einen ästetischen Masstab darstellt.

Definition 5.1 *Eine Strecke ist im goldenen Schnitt geteilt, wenn dass Verhältniss des langen Abschnitts a zum kurzen Abschnitt b gleich dem Verhältniss der Gesammtlänge $a + b$ zum langen Abschnitt ist b. Das Teilungsverhätniss*

$$\gamma := b/a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

ist der goldene Schnitt.

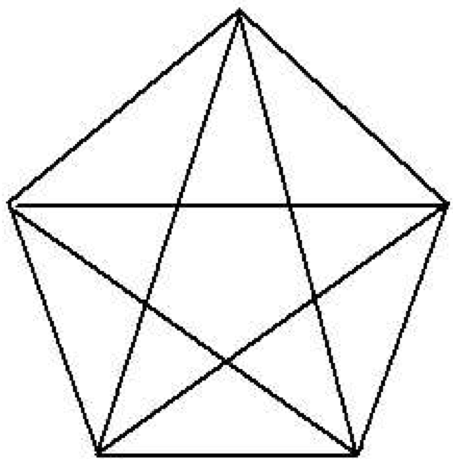

Abbildung 2: Regelmässiges Fünfeck mit eingeschriebenen Pentagramm

Bei Euklid (ca. 300 v.C.) findet sich folgender wunderbarer Satz ber Längenverhätnissen in reglmäsigen Fünfecken und Pentagrammen, vgl. [1].

Theorem 5.1 *Das Verhältniss der Länge der Diagonalen im Fünfeck zur Seitenlnge und das Teilungsverhältniss der Diagonalen die ein Pentagramm aufspannen ist durch den goldenen Schnitt γ gegeben.*

Nun verlassen wir die Ebenen $\mathbb{R}^2$ und betrachten Polyeder im Raum $\mathbb{R}^3$.

Definition 5.2 *Ein Polyeder ist ein Gebiet $P \subseteq \mathbb{R}^3$ das durch endliche viele Ebenen begrenzt ist. P heißt konvex wenn für $x_1, x_2 \in P$ die Strecke S_{x_1,x_2} von x_1 nach x_2 durch P verläuft, d.h.*

$$S_{x_1,x_2} := \{x | x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \ , \ \lambda \in [0,1]\} \subseteq P.$$

Ein konvexer Polyeder ist ein platonischer Körper wenn jede Begrenzungsfläche ein regelmässiges n-Eck ist und an jeder Ecke genau m Kanten zusammentreffen.

Theorem 5.2 *Ist P ein konvexer Polyeder und E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen so gilt*

$$E - K + F = 2.$$

Dies ist die Eulersche Polyeder Formel, die von Euler bereits 1751 bewiesen wurde. Den heutigen standard Beweis mittels Induktion findet sich zum Beispiel in [8]. Ein Beweis der ohne Induktion auskommt wird in [1] dargestellt.

Theorem 5.3 *Es gibt fünf platonische Körper den Tetraeder $(n = 3, m = 3)$, den Würfel $(n = 4, m = 3)$, den Oktaeder $(n = 3, m = 4)$, den Dodekaeder $(n = 5, m = 3)$ und den Ikosaeder $(n = 3, m = 5)$.*

Dieser Satz soll auf Theaetet aus Athen zurckgehen (ca. 350 v.C.). Heute ist der Satz eine Anwendung der Eulerschen Polyederformel, siehe [8].

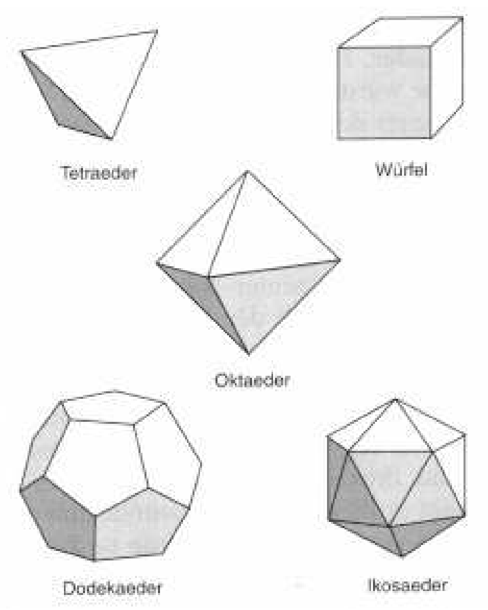

Abbildung 3: Die Platonischen Körper

Theorem 5.4 *Die Qudratur des Kreises, die Dreiteilung eines Winkels und die Verdopplung eines Würfels sind mit Zirkel und Lineal nicht möglich.*

Dieser geometrische Satz lässt sich algebraisch mit Hilfe der Theorie der Körpererweiterungen von Galoia beweisen, vgl. [27].

Theorem 5.5 *Die Ebene $\mathbb{C}$ mit der euklidschen Geometrie (natürliche Graden) erfüllt das Parallenaxiom:*

P1: Zu einer Graden $g \subseteq \mathbb{C}$ und einem Punkt $x \in \mathbb{C} \backslash g$ gibt es genau eine Grade $h \subseteq \mathbb{C}$ durch x die g nicht schneidet.

Dies Sphäre $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| = 1\}$ mit der spärischen Geometrie (die Graden sind Großkreise), erfüllt das Parallenaxiom:

P2: Zu einer graden $g \subseteq S^2$ und einem Punkt $x \in S^2 \backslash g$ gibt es keine Graden $h \subseteq S^2$ durch x die g nicht schneiden.

Die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | z = x + iy, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ mit der Lobachevsky Geometrie (die graden sind Halbkreis mit Mittelpunkten $x \in \mathbb{R}$) erfüllt das Parallenaxiom:

P3: Zu einer graden $g \subseteq H$ und einem Punkt $x \in H \backslash g$ gibt unendlich viele Graden $h \subseteq H$ durch x die g nicht schneidet.

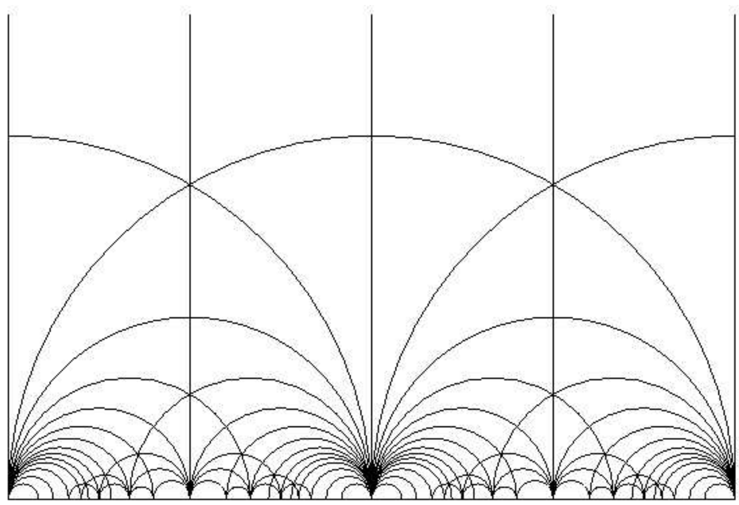

Abbildung 4: Die Lobachevsky Geometrie

Seit der Axiomatisierung der Geometrie der Ebene durch Eucklid (um 300 v.C.) haben viele Mathematiker versucht $P1$ aus den anderen Axiomen der Geometrie herzuleiten, was aber nicht gelang. Im 19ten Jahrhundert wurden dann die Modelle für alternative Geometrien beschrieben, die alle Axiome der Geometrie der Ebene erfüllen, nur das das Parallelenaxiom $P1$ durch durch das Axiom $P2$ oder das Axiom $P3$ ersetzt wird. Die Entdeckung der nicht-euklidschen Geometrie ist ohne Fragen ein Meilenstein in der Entwicklung der Geometrie, vgl [14].

Nun verlassen wir den Bereich der klassischen Geometrie und geben eine kurze Einführung in ein aktuelles Forschungsgebiet, die Fraktale Geometrie.

Definition 5.3 *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$. Ein iterieres Funktionensystheme (IFS) auf K ist durch eine Familie von Kontraktionen $f_i : K \longmapsto K$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben d.h.*

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq c_i \|x - y\|$$

mit $c_i < 1$ für $i = 1, \ldots, n$.

Theorem 5.6 *Ein IFS hat einen eindeutig bestimmten kompakten Attraktor $\Lambda \subseteq K$, d.h.*

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(\Lambda).$$

Λ lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\Lambda = \bigcap_{k}^{\infty} F^k(K)$$

wobei $F : P(K) \longmapsto P(K)$ durch

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$$

gegeben ist.

Attraktoren von IFS haben zumeist keine glatte sondern eine zerfaserte oder ausgefranste Geometrie. Ein einfaches Beispiel eines Attraktors eines IFS ist Sirpinskis Dreieck, siehe Abbildung. Mit IFS lassen sich sogar Objekte der Natur wie Wolke, Pflanzen, Schneeflocken, Gebirgsketten, Küstenlinien usw. beschreiben, die in der klassischen Geometrie kaum zugänglich sind, vgl. [20] und [10].

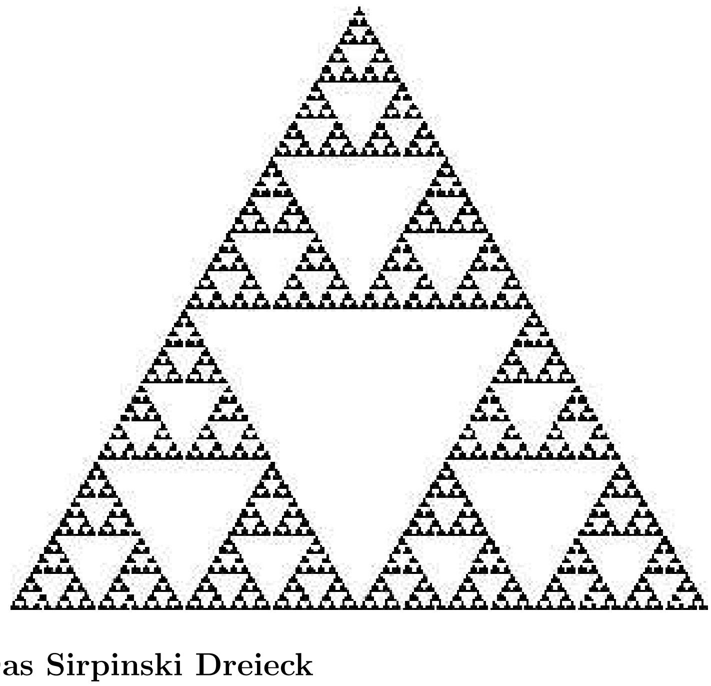

Abbildung 5: Das Sirpinski Dreieck

6 Analysis

Definition 6.1 *Die natürliche Exponentialfunktion* $e : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *ist gegeben durch*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Der Sinus $\sin : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *und der Cosinus* $\cos : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *sind definiert als*

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$\tan(z) := \sin(z)/\cos(z)$ *und* $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$ *ist der Tangens resp. Cotangens.*

Wir setze in der Definition stillschweigend voraus, daß die Potenzreihen konvergieren. Dies lässt sich mit Hilfe elementarer Analysis bewiesen, vgl. [13]. Die hier betrachteten Funktionen lassen sich genauso auch auf die reele Achse $\mathbb{R}$ definieren.

Theorem 6.1

$$e^{iz} = \sin(z) + i\cos(z)$$

insbesondere ergibt sich für $z = \pi$

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Diese Formeln gehen auf Euler(1707-1783) zurück und gehört mit Sicherheit zu dem schönsten was die Mathematik zu bieten hat. Der Beweis ist ausgehend von unserer Definition recht einfach. Im nächsten Satz stellen wir drei schöne und überraschende Darstellungen der trigeometrischen Funktion Sinus und Cotangens mit Produkten und Brüchen dar.

Theorem 6.2

$$(\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2z}{z^2 - n^2})$$

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

Für $z = 1/2\pi$ *erhält man aus der letzen Formel die Produktdarstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Diese Summen und Produktformeln für die Funktionen finden sich bei Euler (1707-1783). Die Formel für π stammt von Wallis (1616-1703). Für einen Beweise der Aussagen verweisen wir auf [11].

Definition 6.2 *$p(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ sie die Partitionszahl d.h. die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten n als Summe von natürlichen Zahlen zu schrieben*

Theorem 6.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)$$

Diese schöne Formel, die wieder von Euler stammt, erlaubt es die Partitionszahlen $p(n)$ rekursive zu berechnen. Der Satz ist damit ein Ausgangspunkt für Resultate der analytischen Kombinatorik, vgl. [2].

Definition 6.3 *Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in \mathbb{C}$ wenn für jede Folge z_n in $\mathbb{C}$*

$$z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Eine Abbildung f heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ wenn ein $C =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$ existiert sodaßfr jede Folge z_n in $\mathbb{C}$.

$$z_n \to z_0 \Rightarrow \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z - z_0} \to C.$$

Ersetzen wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ so erhalten wir die Definition der reele Differenzierbarkeit.

Angemerkt sei das Differenzierbarkeit Stetigkeit und das komplexe Differenzierbarkeit reele Differenzierbarkeit impliziert. Die Umkehrung dieser Aussagen gilt aber nicht, vgl. [13].

Theorem 6.4 *Die Funktionen* sin *und* cos *sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar* tan *und cot sind dort komplex differenzierbar wo sie definiert sind.*

Der Beweis ist ausgehend von der Definition der Funktionen durch Potenzereihen elementar, [11].

Theorem 6.5 *Die Funktion $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n \pi z)$$

ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig aber nirgendwo komplex differenzierbar. Auf $\mathbb{R}$ eingeschrängt ist f nirgendwo reele differenzierbar.

Ohne frage ist dies ein überrachendes Resultat. Alle Funktionen die in der Analysis normalerweise betrachtet werden sind stetig und differenzierbar oder doch zumindest stückweise stetig und differnzierbar. Die hier angegeben Funktion wurde von Weierstraß(1815-1897) als pathologisches Gegenbeispiel eingeführt, vgl [10]. Stetigkeit alleine ist aber schon eine starke Eigenschaft einer Funktion, wie folgender Satz zeigt.

Theorem 6.6 *Jede stetige Abbildung f auf der n-dimensionalen Einheitskugel*

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$$

besitzt mindestens einen Fixpunkt d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) = x$.

Dies ist der Fixpunktsatz von Brouwer (1881-1966). Ein schöner Beweis mit einem kombinatorischen Ansatz wird in [1] gegeben.

Definition 6.4 *Eine Kurve C in $\mathbb{C}$ ist der Graph einer stetig Abbildung $\phi : [0,1] \longmapsto \mathbb{C}$ d.h.*

$$C = \{\phi(t) | t \in [0,1]\}.$$

C heißt einfach geschlossen wenn $\phi(0) = \phi(1)$ und $\phi(s) \neq \phi(t)$ für $s, t \in (0,1)$ mit $s \neq t$.

Theorem 6.7 *Eine einfach geschloße Kurve C zerlegt die Ebenen $\mathbb{C}$ in ein beschränktes und ein unbeschränktes Gebiet. Die Kurve ist der Rand beider Gebiete.*

Für stetige Kurven ist der Beweis dieses Kurvensatzes von Jordan(1902-1980) äusserst schwierig, obwohl die Aussage des Satzes intuitiv sofort einzusehen ist . Der Beweis ist der Toplogie und nicht der Analysis zuzuordnen. Für (stückweise) stetig differenzierbare Kurven ist jedoch ein schöner Beweis mit analytischen Methoden möglich, vgl. [11].

Definition 6.5 *Eine Kurve C heißt recktifizierbar wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle Zerlegungen $Z := (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ von $[0,1]$*

$$\ell(C, Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| < M.$$

$$\ell(C) = \sup\{\ell(C, Z) | Z \text{ eine Zerlegung von } [0,1]\}$$

ist die Länge der Kurve

Wir merken an dieser Stelle an, dass nicht alle stetigen Kurven recktifizierbar sind. Zum Beispiel ist die stetige van Kochsche Schneeflocken Kurve C nicht recktifizierbar, ordnet man ihr eine Lnge ℓ zu so gilt $\ell(C) = \infty$. Die ebenfalls stetig Peanokurve P füllt sogar ein ganzes Rechteck aus, d.h. $P([0,1]) = [0,1]^2$; P ist damit offinsichtlich auch nicht rektifizierbar, vgl. [10].
Der folgende schöne Satz ist die Antwort auf das Problem d er sagenhaften Prinzensin Dido. Er wurder zum ersten mal 1841 von Steiner bewiesen. Ein Bewis des Satz als Folgerung der isoprenischen Ungleichung finden sich in [26].

Theorem 6.8 *Unter allen einfach geschloßenen recktifizierbar Kurven $C \subseteq \mathbb{C}$ schließt der Kreis die größte Fläche ein.*

7 Dynamische Systeme

Definition 7.1 *Sei $f : X \longmapsto X$ eine Abbildung. Die Menge*

$$O_f(x) := \{f^n(x)|n \in \mathbb{N}\}$$

heißt Orbit von $x \in X$ unter f. x heißt periodisch wenn $O_f(x)$ endlich ist, das bedeutet $f^p(x) = x$ für ein $p \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $O_f(x)$ periodischer Orbit und die Anzahl der Elemente in $O_f(x)$ wird Periode genannt.

Theorem 7.1 *Sei $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ stetig. Betrachte folgende Ordnung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:*

$$1 \preceq 2 \preceq 2^2 \preceq \ldots \preceq 2^n \preceq \ldots \preceq 2^k(2n-1) \preceq \ldots \preceq 2^k 3 \preceq \ldots \preceq (2n-1) \preceq \ldots 9 \preceq 7 \preceq 5 \preceq 3$$

Hat f einen periodischen Orbit der Periode p so hat f periodische Orbits der Periode q für $p \succeq q$.

Dieser schöne Satz stammt von Sharkowsky. Der Beweis besteht in einer mehrfachen geschickten Anwendungen des Mittelwertsatzes, vgl. [17].

Definition 7.2 *Sei $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ der Volltorus. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{T}^2 \longmapsto \mathbb{T}^2$*

$$f(\phi, x, y) = (2\phi \ mod \ 2\pi, \lambda x + \epsilon \cos(2\pi\phi), \mu y + \epsilon \sin(2\pi\phi))$$

mit $\lambda, \mu, \epsilon \in \mathbb{R}$ und $\lambda, \mu < \min\{1/2, \epsilon\}$. Die kompakte Menge

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{T}^2)$$

heißt das Solenoid.

Theorem 7.2 *Das Solenoid ist ein Attraktor d.h. für alle $x \in \mathbb{T}$ gilt*

$$\inf_{y \in \Lambda} \|f^n(x) - y\| \to 0.$$

Die Abbildung $f : \Lambda \longmapsto \Lambda$ hat periodische Orbits jeder Periode und es existieren Orbits $O_f(x)$ in Λ die jedem Punkte in Λ beliebig nahe kommt.

Das Solenoid wurde von Smale eingeführt und ist das einfachste und paradigmatische Beispiele eines caotischen Attraktors, vgl. [17].

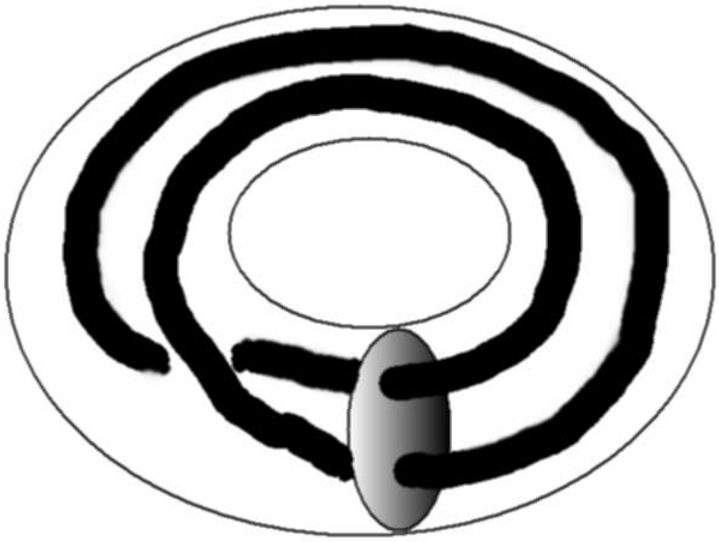

Abbildung 5: Das Bild der Funktion f die das Solenoid erzeugt

Definition 7.3 *Sei X ein topologischer Raum und $f : X \longmapsto X$ eine stetige Abbildung. $\mu : B(X) \subseteq P(X)^4 \longmapsto [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaßwenn μ monoton und sigma-additiv ist d.h.*

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

$$A_i \text{ disjunkt für } i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

μ heisst ergodisch im Bezug auf f wenn μ invariant ist d.h. $\mu = \mu \circ f^{-1}$ und wenn invariante Mengen Maß null oder eins haben, d.h. $f(A) = A \Rightarrow \mu(A) \in \{0,1\}$.

Folgendes Theorem stammt von Poincare (1854-1912), siehe [17], und zeigt daß fast alle Trajekorien $\{f^n(x)|n \geq 0\}$ beliebig nahe an ihren Ausgangspunkt x durch Iteration der Abbildung f zurückkehren.

Theorem 7.3 *Sei $f : X \longmapsto X$ stetige und μ invariant unter f. Sei U eine beliebige messbare Menge mit $\mu(E) > 0$ dann gibt es für fast alle $x \in E$ (im Bezug auf μ) unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(x) \in E$.*

Folgendes Resultat gibt eine genauer Analyse des Verhalten von Trakektorien im Bezug auf ein ergodisches Maß.

Theorem 7.4 *Für fast alle x im Bezug auf auf ein f-ergodisches Maß μ gilt*

$$\lim_{n \longmapsto \infty} \frac{\sharp\{n|f^n(x) \in A\}}{n} = \mu(A).$$

[4] Maße lassen sich nicht auf ganz P(X) definieren. B(X) ist die Borel sigma-Algebra, die alle offenen Mengen enthält vgl. [17]

Dieser Satz besagt das ergodische Maße die Dynamik eines Systems langfristig für fast alle Anfangswerte beschreiben. Der Satz ist eine direkte Konsequenz des Egodensatzes von Birkhoff (1884-1944). Wir haben auf die Beschreibung des allgemeineren Resulats hier verzichten, da man zu diesem Zweck die Lebesgue Integararion einführen muß. Für einen Bewies des Birkhoffschen Ergodensatzes und die hier beschrieben Folgerung, verweisen wir auf [17].

8 Diskrete Mathematik

Theorem 8.1 *Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ und A enthalte $n + 1$ Elemente dann gibt es zwei Zahlen in A von denen die eine die andere teilt.*

Für den große Mathematiker Erdös war der (einfache) Beweis diese Satzes ein Test für die Mathematische Intution eines Menschen. Wir überlassen den Beweis dem geneigten Leser.

Nun noch zwei sehr anschaulichen Resultate der Kombinatorik und Graphentheorie.

Definition 8.1 *Eine Relation zwischen zwei Menschen nennen wir Freundschaft (oder Feindschaft) wenn A ist befreundete (verfeindet) mit B äquivalent zu B ist befreundet (verfeindet) mit A ist.*

Theorem 8.2 *Auf jeder Party gibt es zwei Gäste die gleich viele Freunde (Feinde) haben.*

Der Beweis dieses Satzes ist eine gute Übung ein Beweises durch vollständige Induktion.

Definition 8.2 *Ein Museum heißt gut bewacht wenn alle Wände von den Wächter an ihren Plätzen beobachten werden können. Den Wächter soll hierbei erlaubt sein sich zu drehen.*

Theorem 8.3 *Ein Museum mit n Wänden kann durch maximal $n/3$ Wächter gut bewachen werden, egal wie es gebaut ist.*

Ein schöner Beweis dieses Satzes von Chavatal finden wir in [1].

Den Abschluß unseres Darstellung soll ein Hauptresultat der Grapenthehorie bilden.

Theorem 8.4 *Jede Landkarte lässt sich so mit vier Farben einfärben, sodaßzwei benachbarte Gebiete eine andere Farbe erhalten.*

Der Bewies des Vierfarbsatzes besteht darin das die Menge aller Karten auf eine endliche Menge reduziert wird aus der sich alle Karten zusammensetzen lassen. Die Vierfärbarkeit der Karten in dieser endlichen Menge wird mit einem Computer überprüft, vgl. [16]. Zweifel daran, ob uns diese Form des Beweises konzeptonelle Einsicht in das gestellte Problem gibt, scheinen angebracht. Wir verfügen aber über ein schöner Beweis für die Färbarkeit einer beliebigen Karte mit fünf Farben, vgl. [1].

9 Anhang

Allgemeine Notationen

Ein Menge ist inuitive gesprochen eine wohldefinierte Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung. Wir schreiben Mengen als Auzählung der Elemente
$$\{a, b, c, \ldots\}$$
oder bestimmen eine Menge durch Elemente die eine gewisse Eigenschaft F haben,
$$\{x|F(x)\}.$$
Die Notation $x \in A$ bedeutet das x ein Element der Menge A ist, $x \notin A$ heißt x ist nicht Element von A. Wenn eine Menge A endlich ist bezeichnet $\sharp A$ die Anzahl der Elemente in A. Mit $\cup$, $\cap$, $\setminus$ und $\times$ bezeichnen wir die Vereinigung, den Schnitt, die Differenz und das Produkt von Mengen d.h.
$$A \cup B := \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
$$A \cap B := \{x|x \in A \text{ und } x \in B\}$$
$$A \backslash B := \{x|x \in A \text{ und } x \notin B\}$$
$$A \times B := \{(a, b)|a \in A \text{ und } b \in B\}$$
Mit
$$f : A \longmapsto B$$
beschreiben wir eine Abbildung f von A nach B die jedem $x \in A$ ein Bild $f(x) \in B$ zuordnet.

Der hier eingeführte naive Mengenbegriff führ zu Paradoxien. Wir wollen hier aber darauf verichten die Axiome der Megenllere, wie sie unter anderem von Zermelo(1871-1965) entwicket worden ist, darzustellen und verweisen den Leser auf [5].

Eine Summe von Summanden a_i wobei i eine Indexmenge I durchläuft schreiben wir als
$$\sum_{i \in I} a_i.$$
Eine Produkt über Faktoren a_i wobei i eine Indexmenge I durchläuft schreiben wir als
$$\prod_{i \in I} a_i.$$
Ist die Indexmenge durch die naturlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (s.u.) gegeben schreiben wir auch
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i=1}^{\infty} a_i$$

Auf die Frage der Summierbarkeit solcher unendlicher Summen gehen wir weiter unten ein.

Wir kürzen die logische Implikation, aus a folgt b durch

$$a \Rightarrow b$$

ab. Da wir in diesem Text mit der Darstellung von Ergebnissen und nicht mit Beweisen beschäftig sind, glauben wir auf eine Einführung in die mathematische Logik verzichten zu können. Der interessierte Leser sei auf [5] verwiesen.

Zahlenbereiche

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Man kann die natürlichen Zahlen formal als Menge die die Axiome von Peano(1858-1932) erfüllt einführen:

$$1 \in \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ hat einen Nachfolger } \tilde{n} \in \mathbb{N}$$

$$1 \text{ hat keinen Nachfolger}$$

$$n \neq m \Rightarrow \tilde{n} \neq \tilde{m}$$

$$1 \in M \text{ und } (n \in M \Rightarrow \tilde{n} \in M) \text{ impliziert } M = \mathbb{N}$$

oder sie aus den Axiomen einer hinreichend starken Mengenlehre konstruieren. Aus den natürlichen Zahlen lassen sich die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, \ldots\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$$

konstruieren. Mit Hilfe von unendlichen Folgen rationaler Zahlen lassen sich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ konstruieren. Wir wollen $\mathbb{R}$ hier aber durch die folgenden Axiome einführen die für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten sollten

$$a + b = b + a \text{ und } ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a(b+)c = ab + ac$$

$$\text{Es gibt } 0, 1 \in \mathbb{R} \text{ mit } a + 0 = a \text{ und } a \cdot 1 = a$$

$$\text{Es gibt } -a, a^{-1} \in \mathbb{R} \text{ mit } a + (-a) = 0 \text{ und } a \cdot a^{-1} = 1 \text{ für } a \not\emptyset$$

$$\text{Es gilt eine der drei Beziehungen } a < b, \ a = b, a > b$$

$$a < b \text{ und } b < c \Rightarrow a < c$$

$$a < b \Rightarrow a + c \leq b + c, ab < bc \text{ für } c > 0$$

Jede nach oben beschränkte Menge M besitz ein Spremum $s := \sup M \in \mathbb{R}$

d.h. eine kleinste obere Schranke

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}$$

Dies ist der n-dimensionale Vektorraum über den reellen Zahlen, vgl. Abschnitt zwei dieser Arbeit. Für $r = (r_1, \dots r_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die euklidsche Norm definiert

$$\|r\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}.$$

Im Falle $n = 1$ ergibt sich der Betrag. Die Norm bzw. der Betrag definiert einen Abstand zweier Punkte a und b mittels $\|a - b\|$.

Wir definieren die imaginäre Einheit i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ also $i\sqrt{-1}$. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind durch

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Auf $\mathbb{C}$ sind die Addition und die Multiplikation, wie folgt definiert

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bd)i$$

Vermge der Abbildung

$$a + bi \longleftrightarrow (a, b)$$

lässt sich $\mathbb{C}$ mit der euklidschen Ebene $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Damit ist auch die euklidche Norm auf $\mathbb{C}$ definiert.

Eine ausführlichere Einführung der Zahlenbereiche finden der Leser um Beispiel in [13].

Der Grenzwertbegriff

Haben wir eine Folge a_n von von reelen oder komplexen Zahlen wobei n die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ durchläuft so bedeutete

$$a_n \to a \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \longmapsto \infty} a_n = a$$

das sich die Folge einem Grenzwert a annährt. Formal heißt dies, für alle $\epsilon > 0$ existiert ein n_0 sodaßfür alle $n \geq n_0$

$$\|a_n - a\| < \epsilon.$$

Summieren wir die Folgenglieder und bilden die Summenfolge (Reihe)

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_k$$

so bezeichnet die unendliche Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

grade den Grenzwert der Reihe s_k. Dem Leser der den Umgang mit Folgen und Reihen erlernen möchte sei [13] empfohlen.

Literatur

[1] M. Aigner und M. Ziegler, *Das Buch der Beweise*, Springer Verlag Berlin, 2002.

[2] G.E. Andrews, *The theory of partiotion*, Cambridge University Press, 1998.

[3] M.J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhauser Verlag Basel, 1992.

[4] N. Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer Verlag Berlin, 1994.

[5] P.J. Cameron, *Sets, Logic and Cathegory*, Springer Verlag Berlin, 1999.

[6] P.J. Cohen, *The Idependence of the Continuum Hypothesis I/II*, Pro. Nat. Acas. Sci. USA, 50/51, 1963/1964.

[7] H.F. Cullen, *Introduction to General Topolgy*, Boston MA Heath, 1968.

[8] P.R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.

[9] P. Erdös, *Beweis eines Satzes von Tschebyscheff*, Acta Sci. Math 5, 194-198, 1932.

[10] K. Falconer, Fractal Geometry - mathematical foundations and applications-, Wiley New York, 1990.

[11] W. Fischer und I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[12] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Springer Verlag Berlin, 1964.

[13] H.Heuser, *Lehrbuch der Analysis I/II*, Teubner Verlag Stuttgart, 1980.

[14] Eucliadian and Non-Euclidian Geometry: Development and History, Freeman and Wiley Company, 1993.

[15] S.Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Springer Veralg New York, 1997-

[16] N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour und R. Thomas, *The four coulour theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B 70, 2-44, 1997.

[17] A. Katok und B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

[18] J.L. Kelly, *The Tychonoff Theorem implies the axiom of Choice*, Fund. Math. 37, 75-76, 1950.

[19] F. Lindemann, *Über die Zahl* π, Math.Ann. 213-225, 1882.

[20] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.

[21] G.H. Moore, *Zermelo's Axiom of choice -It's Orgin, Development and Influence*, Springer-Verlag New York, 1991.

[22] S.J. Patterson, *Itroduction to the Riemanian Zeta function*, Cambridge University Press, 1988.

[23] J. Roberts, *Elementary Number Theory*, MIT Press Cambridge, 1977.

[24] R. Taschner, *Das Unendliche - Ringen um Begriff*, Springer Heidelberg, 1995.

[25] R. Taylor und A. Wiles, *Ring theoretical properties of certain Hecke Algebras*, Annals of Math 141, 1995.

[26] L. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Propability*, Enceclopy of Mathematics and its Applications, Vol. 1, Addison Wesly Publications Reading, 1976.

[27] B.L. van der Waerden, *Algebra*, Springer Verlag Berlin, 2003.

[28] S. Wagon, *The Banach Tarski Paradox*, Cambride University Presss, 1993.

[29] A. Wiles, *Modular eliptic curves and Fermats Last theorem*, Annals of Math. 141, 1995.